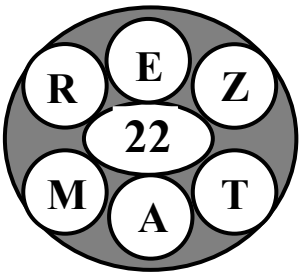
PAVEL TRIPA

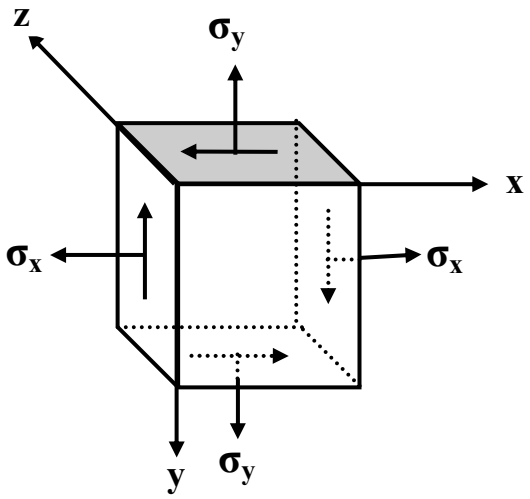
R E Z I S T E N Ț A

M A T E R I A L E L O R

SOLICITĂRI SIMPLE ŞI TEORIA ELASTICITĂȚII

MONOGRAFII REZMAT





Editura MIRTON
Timişoara 1999

Referenţi ştiinţifici:

Prof. Dr. Ing. Eur. Ing. **Tiberiu BABEU**
Membru al Academiei de Ştiinţe Tehnice din România
Prof. Dr. Ing. **Nicolae FAUR**

Tehnoredactare computerizată:
Conf. dr. ing. **Pavel TRIPA**

TRIPA, PAVEL
Rezistenţa materialelor / Pavel Tripa. – Timişoara:
Editura Mirton, 1999
258 p,; 24 cm
Bibliogr.
ISBN 973-578-915-9

539.4

C U P R I N S

Prefață 4

1. NOȚIUNI INTRODUCTIVE 6

1.1 Solid rigid: solid deformabil 6
1.2 Obiectul şi problemele Rezistenței Materialelor 6
1.3 Clasificarea corpurilor în Rezistența Materialelor 8
1.4 Forțe exterioare 9
1.5 Reazeme şi reacțiuni (forțe de legătură) 11
1.6 Noțiuni fundamentale în Rezistența Materialelor: tensiuni, deplasări, deformații, deformații specifice 14
1.7 Contracția transversală 17
1.8 Ipoteze de bază în Rezistența Materialelor 19
1.9 Coeficienți de siguranță. Tensiuni admisibile 21

2. FORȚE INTERIOARE (EFORTURI). DIAGRAME DE EFORTURI 23

2.1 Definirea eforturilor în secțiunea transversală a unei bare drepte 23
2.2 Relații diferențiale între eforturi şi tensiuni 26
2.3 Relații diferențiale între eforturi şi sarcini 27
2.4 Trasarea diagramelor de eforturi 30
2.4.1 Diagrame de eforturi la bare drepte 31
2.4.2 Diagrame de eforturi la bare cotite în plan (cadre plane) 44
2.4.3 Diagrame de eforturi la bare curbe plane 51
2.4.4 Diagrame de eforturi la bare cotite în spațiu (cadre spațiale) 54
2.4.5 Bare solicitate prin forțe concentrate mobile. Moment maxim maximorum 57

3. CARACTERISTICI GEOMETRICE ALE SUPRAFEȚELOR PLANE 62

3.1 Aria suprafeței plane 63
3.2 Momentul static 63
3.3 Momente de inerție 64
3.4 Raza de inerție (girație) 66
3.5 Modulul de rezistență 66
3.6 Momente de inerție şi module de rezistență pentru câteva suprafețe simple 67
3.7 Variația momentelor de inerție față de axe paralele 70
3.8 Variația momentelor de inerție față de axe rotite. Direcții şi momente de inerție principale 71
3.9 Aplicații 76

4. CARACTERISTICI MECANICE ALE METALELOR . ÎNCERCAREA LA TRACȚIUNE ŞI COMPRESIUNE A OȚELULUI 80

4.1 Încercarea la tracțiune a oțelului de uz general 80
4.2 Încercarea la compresiune a oțelului 84
4.3 Încercarea la tracțiune a oțelului aliat 85
4.4 Clasificarea materialelor în funcție de caracteristicile mecanice 87

5. TRACȚIUNEA ŞI COMPRESIUNEA BARELOR DREPTE . APLICAȚII 90

5.1 Tensiuni şi deformații la solicitarea axială 90
5.2 Concentrarea tensiunilor 96
5.3 Bara de secțiune constantă solicitată axial când se ține seama şi de greutatea proprie 98
5.4 Bara de egală rezistență 101
5.5 Tensiuni pe o secțiune înclinată la bara solicitată la tracțiune 104
5.6 Energia de deformație la solicitarea axială 106
5.7 Sisteme static nedeterminate la solicitarea axială 108
5.7.1 Sisteme de bare articulate concurente static nedeterminate 108
5.7.2 Sisteme de bare articulate neconcurente static nedeterminate 110
5.7.3 Sisteme cu inexactități de execuție 112
5.7.4 Bare cu secțiune neomogenă solicitate axial 116
5.7.5 Bare supuse variațiilor de temperatură 119

6. FORFECAREA PIESELOR DE GROSIME MICĂ 126

6.1 Tensiuni şi deformații la forfecare 126
6.2 Calculul îmbinărilor de piese 128
6.2.1 Calculul îmbinărilor nituite 129
6.2.2 Calculul îmbinărilor sudate 136
6.3 Calculul îmbinărilor de piese din lemn 140
6.4 Aplicații la calculul îmbinărilor de piese 143

7. ÎNCOVOIEREA BARELOR PLANE 148

7.1 Tensiuni în bare drepte solicitate la încovoiere pură 148
7.2 Forme raționale de secțiune pentru solicitarea de încovoiere 154
7.3 Încovoierea cu forță tăietoare 155
7.3.1 Tensiuni tangențiale la încovoierea cu forță tăietoare 155
7.3.2 Variația tensiunii tangențiale la suprafețe simple 159
7.4 Neglijarea tensiunii tangențiale la unele calcule la încovoiere simplă 165
7.5 Energia de deformație la încovoiere pură 166
7.6 Grinzi de egală rezistență 168
7.7 Încovoierea oblică a barelor drepte 175
7.8 Tensiuni în bare curbe plane solicitate la încovoiere pură 178
7.9 Aplicații la solicitarea de încovoiere pură 186

8. TORSIUNEA BARELOR DREPTE 194

8.1 Momentul de torsiune (răsucire) 194
8.2 Torsiunea barelor de secțiune circulară 195
8.3 Torsiunea barelor de secțiune dreptunghiulară 199

8.4 Torsiunea barelor tubulare cu pereți subțiri 203
8.5 Energia de deformație la răsucire 208
8.6 Dualitatea tensiunilor tangențiale. Starea de forfecare pură 208
8.7 Calculul arcurilor elicoidale cu pas mic 211
8.8 Aplicații la solicitarea de torsiune 215

9. NOȚIUNI DE TEORIA ELESTICITĂȚII. STAREA DE TENSIUNE ŞI DEFORMAȚIE 227

9.1 Tensorul tensiune 227
9.2 Starea plană de tensiune 228
9.2.1 Tensiuni pe secțiuni înclinate. Direcții principale şi tensiuni principale 228
9.2.2 Cercul lui Mohr pentru starea plană de tensiune 232
9.2.3 Cazuri particulare ale stării plane de tensiune 234
9.3 Starea plană de deformație 235
9.4 Starea spațială de tensiune 237
9.4.1 Tensiuni pe secțiuni înclinate 237
9.4.2 Tensiuni principale 238
9.4.3 Tensiuni octaedrice 242
9.4.4 Elipsoidul tensiunilor 242
9.4.5 Cercul lui Mohr pentru starea spațială de tensiune 243
9.5 Starea spațială de deformație 244
9.6 Legea lui Hooke generalizată 245
9.7 Relația dintre constantele elastice E, G, ν 249
9.8 Energia de deformație 251

10. BIBLIOGRAFIE 256

Prefață

Rezistența Materialelor a apărut ca urmare a cerințelor practice legate de realizarea de construcții durabile şi economice.

Orice construcție, indiferent de tipul său, trebuie să reziste cât mai bine la sarcinile la care este supusă şi în acelaşi timp, să fie realizată cu consum minim de material şi manoperă. Realizarea unor astfel de construcții necesită o proiectare rațională a tuturor elementelor componente şi asigurarea unei siguranțe ridicate în funcționare.

Reducerea consumurilor specifice, constituie o cerință care stă permanent în fața proiectanților de maşini şi utilaje, în vederea optimizării acestora, atât din punct de vedere al economiei de material cât şi al bunei funcționări.

Rezistența Materialelor, care face parte din disciplinele care studiază mecanica corpului solid, este prima chemată să pună la dispoziția inginerilor, cunoştințele necesare stabilirii formei şi dimensiunilor optime ale pieselor, cu asigurarea siguranței în funcționare a acestora.

Rezistența Materialelor, ca şi alte discipline de cultură tehnică generală, îmbină cunoştințele teoretice cu rezolvarea unui număr cât mai mare de probleme pe cât posibil reale şi cu lucrările de laborator. Rezolvarea problemelor de rezistența materialelor, nu poate fi făcută fără acumularea unor cunoştințe teoretice temeinice. Rezultă de aici importanța pe care o are disciplina de Rezistența Materialelor în pregătirea inginerului, mai ales al celui din domeniul mecanic.

Prezenta lucrare de *Rezistența Materialelor*, se adresează în primul rând studenților de la învățământul tehnic şi în special celor din domeniul mecanic. De altfel, lucrarea urmăreşte programa analitică prevăzută pentru profilul *Inginerie Managerială şi Tehnologică*, unde autorul predă de câțiva ani cursul de *Rezistența Materialelor, Mecanica Plasticității şi a Ruperii.* În această lucrare se prezintă numai acea parte a materiei care se predă pe parcursul unui singur semestru.

Lucrarea poate fi consultată cu rezultate bune şi de către inginerii din producție şi mai ales cei din proiectare şi cercetare, care pe parcursul anilor din diferite motive, legătura lor cu calculele de rezistență a fost mai slabă.

Pentru o eficiență superioară, pe baza noțiunilor tratate, în lucrare se prezintă rezolvarea unor probleme concrete.

S-a căutat ca noțiunile teoretice să fie prezentate cât mai simplu, insistându-se mai mult asupra fenomenelor, legilor şi noțiunilor fundamentale ale mecanicii corpului solid deformabil, avându-se în acelaşi timp în vedere şi capacitatea de asimilare de către studenți a acestor cunoştințe.

Toate relațiile de calcul sunt deduse pe baza unor demonstrații simple şi în logica lor firească.

Conştient fiind de faptul că lucrarea poate fi îmbunătățită atât în conținut cât mai ales în prezentarea grafică, autorul mulțumeşte tuturor acelora care vor veni cu propuneri concrete pentru îmbunătățirea acesteia, într-o ediție viitoare.

Autorul

1. NOȚIUNI INTRODUCTIVE

1.1 SOLID RIGID. SOLID DEFORMABIL

Dacă un corp solid nu îşi modifică forma şi dimensiunile sub acțiunea unui sistem de forțe, atunci el este un *solid rigid.* Dacă sub acțiunea sistemului de forțe solidul îşi modifică forma şi dimensiunile, el este un *solid deformabil.*

Mecanica Corpurilor Deformabile, respectiv *Rezistența Materialelor* are în vedere *deformabilitatea* corpurilor, ceea ce-i permite să rezolve o serie de probleme imposibil de rezolvat în *Mecanica Rigidului.*

1.2 OBIECTUL ŞI PROBLEMELE REZISTENȚEI MATERIALELOR

Practica dovedeşte că sub acțiunea forțelor exterioare, orice corp solid se deformează. Dacă după îndepărtarea forțelor exterioare corpul revine la forma şi dimensiunile inițiale, se spune că este realizat dintr-un *material elastic* sau că are o *comportare elastică.* Dacă deformațiile corpului sunt proporționale cu forțele aplicate, materialul este *liniar elastic.*

Rezistența Materialelor *este o disciplină de cultură tehnică generală, care face legătura între disciplinele fizico-matematice şi cele de specialitate,* fiind în acelaşi timp o continuare a *Mecanicii Teoretice,* însă cu unele particularități.

În *Mecanica Teoretică*, corpurile solide sunt considerate rigide, adică fără deformații, indiferent de mărimea forțelor exterioare care solicită corpul. *Rezistența Materialelor* introduce un model nou, modelul *solidului deformabil*.

Se consideră un corp solid asupra căruia acționează două forțe **F**, egale, colineare şi de sens contrar ca în Fig.1.2-1

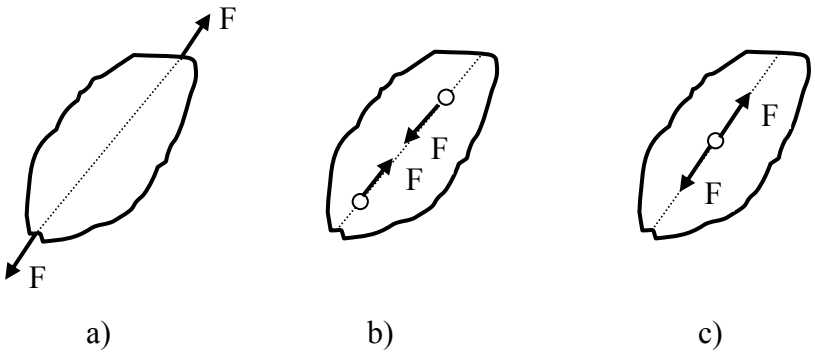


Fig.1.2-1 Variante de solicitare a unui corp solid

Din punct de vedere al Mecanicii Teoretice, cele trei variante sunt identice: corpul este în echilibru şi nu suferă deformaţii. Din punct de vedere al Rezistenței Materialelor, cele trei cazuri prezentate sunt diferite şi anume:

Cazul a) – corpul este supus unei solicitări de tracțiune şi el se lungeşte,

Cazul b) – corpul este comprimat şi se scurtează,

Cazul c) – corpul nu este solicitat şi nu suferă deformaţii.

În ambele cazuri, corpul sub acțiunea celor două forțe este în echilibru. Rezultă de aici că în cazul Rezistenței Materialelor, este important să se cunoască poziția punctului de aplicație al forțelor.

În principal, scopul Rezistenței Materialelor este acela de a stabili *dimensiunile* unei piese, realizată dintr-un material cunoscut, astfel ca acesta să reziste în condiții bune forțelor exterioare aplicate. Această operație de calcul este o operație de *dimensionare*. În cazul *problemelor de dimensionare* se cunosc forțele aplicate, modul de rezemare al piesei, se cunoaşte materialul din care este realizată piesa şi se determină anumite *caracteristici geometrice* ale secțiunii transversale ale acesteia. Dacă piesa este dată (ca formă şi dimensiuni) iar forțele sunt cunoscute, se face un *calcul de verificare* pentru a se stabili dacă piesa este sigură în funcționare. În unele situații este cunoscută forma şi dimensiunile piesei, condițiile pe care aceasta trebuie să le satisfacă şi este necesar să se determine mărimea forțelor care pot acționa asupra acesteia. În acest caz, se face un calcul *al încărcării capabile*. Astfel în Rezistența Materialelor, se întâlnesc trei tipuri de probleme:

- ***probleme de dimensionare***
- ***probleme de verificare***
- ***probleme de încărcare capabilă*** (sau efort capabil).

În rezolvarea celor trei tipuri de probleme, Rezistența Materialelor, are în vedere următoarele criterii:

- *criteriul economic*; orice piesă trebuie realizată cu soluția cea mai economică din punct de vedere al consumului de material şi manoperă,
- *criteriul bunei funcționări*; piesa realizată trebuie să-şi îndeplinească rolul funcțional pentru care a fost realizată, un timp cât mai îndelungat.

O bună funcționare a piesei, impune respectarea următoarelor condiții:

- *de rezistență*, adică piesa să reziste solicitărilor la care este supusă
- *de rigiditate (deformabilitate),* adică sub acțiunea solicitărilor să nu sufere deformații care pun în pericol buna funcționare a piesei,
- *de stabilitate,* adică în timpul funcționării, piesa să-şi păstreze tot timpul starea de echilibru stabil.

Rezistența Materialelor este o disciplină care se înrudeşte cu o serie de alte discipline, cum ar fi: Mecanica Teoretică, Teoria Elasticității, Teoria Plasticității, Teoria Stabilității Elastice, Teoria Oscilațiilor Mecanice, Încercări de Materiale, Mecanica Ruperii Materialelor etc.

1.3 CLASIFICAREA CORPURILOR ÎN REZISTENȚA MATERIALELOR

Clasificarea corpurilor din punct de vedere al Rezistenței Materialelor, se bazează în principal pe raportul care există între cele trei dimensiuni (lungime, lățime, grosime) ale acestora. Din acest punct de vedere, se disting trei mari categorii de corpuri:

a) corpuri care au o dimensiune (de obicei lungimea) mult mai mare decât celelalte două. Aceste corpuri se numesc *corpuri cu fibră medie* sau *bare*. Caracteristic pentru aceste corpuri este *secțiunea transversală* şi *axa longitudinală* (Fig.1.3-1a). Secțiunea transversală este secțiunea normală la axa longitudinală iar axa longitudinală reprezintă locul geometric al centrelor de greutate a secțiunilor transversale.

După forma axei longitudinale, barele pot fi: *drepte, curbe în plan, curbe în spațiu* (strâmbe), iar după modul în care variază secțiunea în lungul axei longitudinale, bare pot fi: *cu secțiune constantă* (Fig.1.3-1a) sau cu *secțiune variabilă* (Fig.1.3-1b,c).

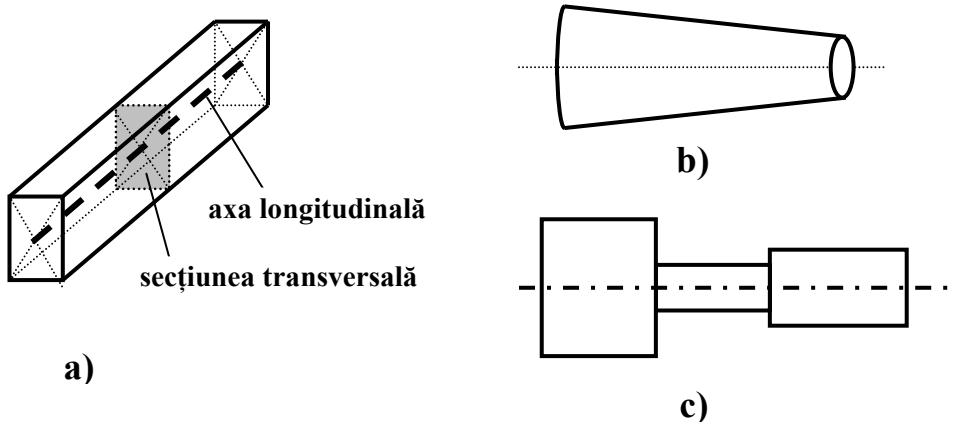


Fig.1.3-1 Tipuri de bare drepte

După *destinație şi modul de solicitate,* barele au diferite denumiri:

- cele solicitate la întindere se numesc *tiranți*
- cele solicitate la compresiune se numesc *stâlpi*
- cele solicitate la încovoiere se numesc *grinzi*
- cele solicitate la torsiune se numesc *arbori.*

Barele care pot fi solicitate numai la întindere şi care practic nu opun nici o rezistență solicitărilor transversale sau celor de compresiune, se numesc *fire*.

b) Corpurile care au două dimensiuni mult mai mari decât cea de-a treia (grosimea) se numesc *plăci* (Fig.1.3-2). Ele se caracterizează prin mărimea grosimii şi prin forma şi dimensiunile suprafeței mediane, care împarte grosimea în orice loc în două părți egale.

Plăcile care au grosime foarte mică şi nu pot prelua sarcini transversale sau de compresiune, se numesc *membrane*.

După forma suprafeței mediane, plăcile pot fi *plane* sau *curbe* (capace, cupole, planşee, etc.).

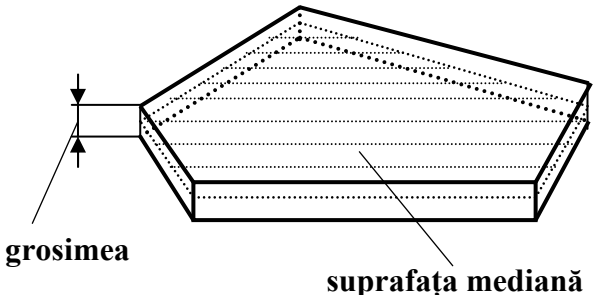


Fig.1.3-2 Elementele unei plăci

c) Corpurile care au dimensiunile de acelaşi ordin de mărime, se numesc *masive* sau *blocuri*. În categoria acestor corpuri intră: fundațiile, bilele sau rolele de rulmenți etc.

Calculele de rezistență diferă de la o grupă la alta de corpuri, ele fiind mai simple în cazul barelor drepte, mai complicate la barele curbe şi mai dificile la plăci şi blocuri.

Corpurile cu care se operează în Rezistența Materialelor poartă şi denumirea de *elemente de rezistență.*

1.4 FORȚE EXTERIOARE

Corpurile sau elementele de rezistență, sunt supuse acțiunii unor forțe sau cupluri de forțe (momente). Forțele sau momentele direct aplicate asupra unui element de rezistență se numesc *sarcini*.

Sarcinile se pot clasifica după mai multe criterii: Astfel:

a) după *mărimea suprafeței* pe care ele acționează, sarcinile pot fi:

- *concentrate* (Fig.1.4-1a)
- *repartizate* sau *distribuite*, uniform sau cu intensitate variabilă în lungul elementului sau pe o suprafață (Fig.1.4-1b)

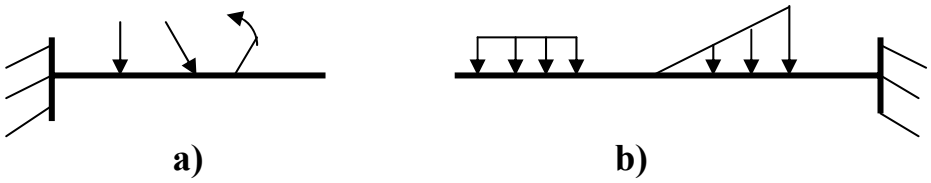


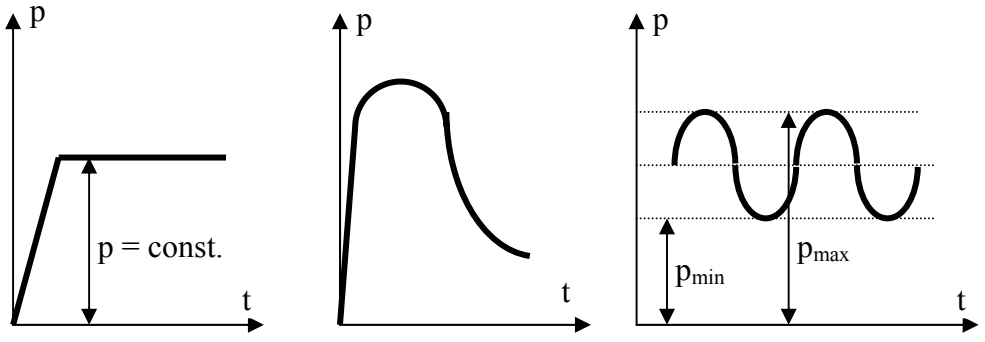
Fig.1.4-1 Sarcini concentrate şi distribuite

b) după *modul de acțiune în timp*, se disting (Fig.1.4-2):

- *sarcini statice,* care se aplică lent şi rămân constante (Fig.1.4-2a)
- *sarcini dinamice,* care se aplică cu viteză relativ mare (Fig.1.4-2b).

Sarcinile dinamice la rândul lor pot fi: sarcini aplicate în mod brusc, *şocuri* sau *sarcini variabile periodice* între o valoare minimă p_{min} şi una maximă p_{max} (Fig.1.4-2c).

Dacă $p_{min} = 0$, atunci sarcina se numeşte *pulsatoare*, iar dacă $p_{max} = -p_{min}$, *alternativ simetrică*.



a) **b)** **c)**

Fig.1.4-2 Sarcini variabile în timp

c) după *locul de aplicare*, sarcinile pot fi:

- *de suprafață sau de contur,* cele care sunt aplicate din exteriorul corpului
- *masice,* care provin din masa corpului, cum sunt greutatea şi forțele de inerție

d) În construcții, după *provenienţă*, sarcinile se clasifică astfel:

- *sarcini fundamentale*, din rândul cărora fac parte:
  - *sarcinile permanente de intensitate constantă* (greutatea proprie)
  - *sarcinile utile* reprezintă scopul pentru care s-a realizat construcția (greutatea autovehiculelor pe un pod) şi care pot fi *fixe* sau *mobile*
  - *sarcinile accesorii* (forțele de inerție, forțele de frecare, forțele termice etc.)
- *sarcinile accidentale,* care acționează intermitent şi neregulat (acțiunea vântului, greutatea zăpezii, forța de frânare a autovehiculului etc.)
- *sarcini extraordinare.* Aceste sarcini acționează întâmplător, dar pot avea efecte dezastruoase (exploziile, cutremurele, inundațiile etc.).

Sub acțiunea sarcinilor, în reazemele elementelor de rezistență apar *forțe de legătură*, numite *reacțiuni.* Sarcinile împreună cu reacțiunile formează *forțele exterioare.* Atât sarcinile cât şi reacțiunile, adică forțele exterioare, se consideră forțe aplicate corpului şi sub acțiunea acestor forțe, corpul este în echilibru şi în el ia naştere o anumită stare de solicitare.

1.5 REAZEME ŞI REACȚIUNI (FORȚE DE LEGĂTURĂ). ECUAȚII DE ECHILIBRU

Între elementele de rezistență ale unei structuri, există o serie de legături numite *reazeme.*

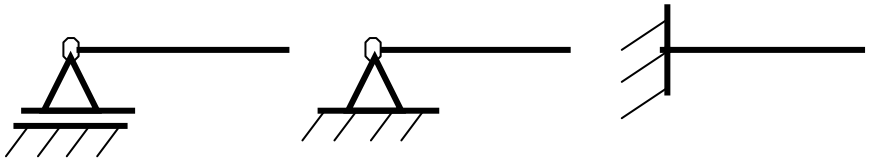
În calculele obişnuite de rezistență, cele mai întâlnite reazeme sunt:

- *reazemul articulat mobil* (articulația mobilă sau reazemul mobil)
- *reazemul articulat fix* (articulația fixă)
- *încastrarea* (înțepenirea).

Articulația mobilă, a cărei reprezentare este prezentată în Fig.1.5-1a, permite celor două elemente de rezistență să se rotească unul față de celălalt şi de asemenea o deplasare liberă pe o anumită direcție. În cazul prezentat în figură, este permisă deplasarea liberă pe direcție orizontală. Pe direcția verticală (direcție perpendiculară pe cea pe care este permisă deplasarea liberă), deplasarea este împiedicată.

Articulația fixă (Fig.1.5-1b) permite rotirea elementului, dar nu permite deplasarea acestuia pe nici o direcție.

Încastrarea (Fig.1.5-1c) împiedică orice fel de deplasare a elementului de rezistență precum şi rotirile acestuia. Acest tip de reazem se poate obține dintr-o articulație fixă, la care se blochează rotirile.



a) **b)** **c)**

Fig. 1.5-1 Reprezentarea celor mai uzuale reazeme

Deoarece elementele de rezistență sunt supuse acțiunii diferitelor sarcini, este firesc ca în reazeme să apară forțe de legătură numite *reacțiuni*. Mărimea şi orientarea reacțiunilor este dată de mărimea şi orientarea sarcinilor care solicită elementul, iar direcția acestora este legată de tipul rezemului.

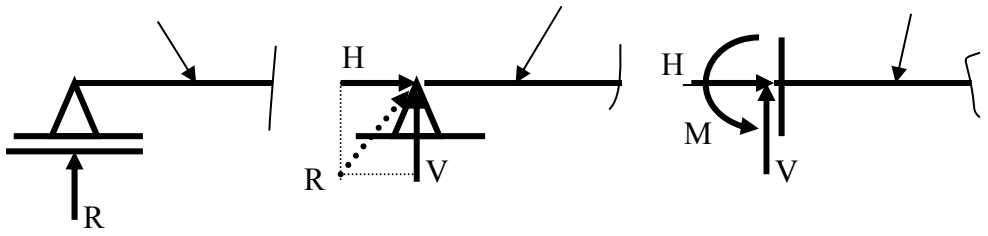
După cum este bine cunoscut, reacțiunile se opun acțiunii (sarcinilor) şi ca urmare ele apar pe acele direcții pe care mişcările (deplasările şi rotirile) elementului de rezistență sunt împiedicate.

Pentru articulația mobilă, fiind împiedicată deplasarea pe o singură direcție, reacțiunea **R** care apare este o forță (Fig.1.5-2a) care trece prin centrul articulației mobile şi este dirijată perpendicular pe direcția deplasării libere a reazemului (în mod obişnuit pe axa grinzii).

În cazul articulației fixe, reacțiunea care ia naştere în reazem este o forță **R** a cărei direcție nu este cunoscută. Se cunoaşte numai punctul de aplicație al acesteia, care este articulația. Pentru a putea calcula reacțiunea din articulația fixă, se înlocuieşte reacțiunea **R** prin două componente ale sale: **H** orientată în

lungul axei longitudinale a elementului şi **V** dirijată perpendicular pe axa elementului (Fig.1.5-2b). Aşadar, articulația fixă prezintă două componente pentru reacțiuni: **H** şi **V**.

Încastrarea fiind o articulație fixă la care s-au blocat toate rotirile, înseamnă că față de articulația fixă la acest tip de reazem apare în plus un moment (cuplu) **M** (Fig.1.5-2c). Din acest motiv, la o încastrare, apar trei componente de reacțiuni: **H** paralelă cu axa elementului, **V** perpendiculară pe axa elementului de rezistență şi cuplul **M.** În cazul unui sistem spațial, într-o înțepenire apar trei componente de forțe şi trei cupluri (după cele trei direcții x, y şi z).



a) **b)** **c)**

Fig.1.5-2 Reacțiuni în principalele tipuri de reazem

Sub acțiunea forțelor exterioare, un sistem este în echilibru. Valoarea reacținilor se determină din condiția de echilibru a sistemului solicitat.

Este cunoscut faptul că un sistem plan este în echilibru dacă:

- nu se deplasează pe o direcție (fie x această direcție)
- nu se deplasează pe o direcție perpendiculară pe prima (fie y această direcție)
- nu se roteşte față de un punct al planului (fie K acest punct).

Cele trei condiții enunțate mai înainte sunt satisfăcute dacă suma proiecțiilor tuturor forțelor pe direcția x, respectiv y este nulă şi suma tuturor cuplurilor față de un punct al planului, este nulă. Aceste condiții pot fi scrise sub forma unor relații de tipul:

$$\left(\sum F\right)_x = 0$$
$$\left(\sum F\right)_y = 0 \qquad 1.5\text{-}1$$
$$\left(\sum M\right)_K = 0$$

Sistemul de mai sus, pentru a putea fi rezolvat, poate conține maxim trei necunoscute. În cazul abordat, cele trei necunoscute sunt reacțiunile. Dacă sunt mai mult de trei necunoscute (reacțiuni) sistemul nu poate fi rezolvat şi în acest

caz el este un *sistem static nedeterminat.* Pentru rezolvarea sistemelor static nedeterminate, sunt necesare ecuații suplimentare.

Determinând reacțiunile unui element de rezistență cu relațiile prezentate, nu există o posibilitate simplă pentru verificarea corectitudinii calculului efectuat.

Pentru a avea posibilitatea verificării corectitudinii calculului reacțiunilor şi pentru a obține ecuații uşor de rezolvat, relațiile pentru calculul reacțiunilor se vor scrie sub forma:

$$\left(\sum F\right)_x = 0$$

$$\left(\sum M\right)_{K_1} = 0 \qquad 1.5\text{-}2$$

$$\left(\sum M\right)_{K_2} = 0$$

Valorile reacțiunilor determinate cu relațiile 1.5-2 se introduc în relația 5.2-1,

$$\left(\sum F\right)_y$$

Dacă se obține:

$\left(\sum F\right)_y = 0$ reacțiunile sunt corect calculate

1.5-3

$\left(\sum F\right)_y \neq 0$ reacțiunile sunt greşit calculate.

În acest ultim caz, se reface calculul.

În concluzie, calculul reacțiunilor pentru un sistem plan se face cu ajutorul relațiilor 1.5-2, iar verificarea corectitudinii calculului (etapă obligatorie), cu relațiile 1.5-3.

În Tabelul 1.5-1, se prezintă numărul ecuațiilor de echilibru care se pot scrie pentru diferite tipuri de forțe.

Tabelul 1.5-1

Felul forțelor	**Numărul ecuațiilor de echilibru**	
	De proiecții	**De momente**
Coliniare	1	-
Concurente în plan	2	-
Concurente în spațiu	3	-
Paralele în plan	1	1
Paralele în spațiu	1	2

Oarecare în plan	2	1
Oarecare în spațiu	3	3

1.6 MĂRIMI FUNDAMENTALE ÎN REZISTENȚA MATERIALELOR: TENSIUNI, DEPLASĂRI ŞI DEFORMAȚII, DEFORMAȚII SPECIFICE

Tensiuni

Se consideră un element de arie dA din aria **A** a secțiunii transversale a unui element de rezistență şi pe care acționează forța dF, având o direcție oarecare (Fig.1.6-1a). Dacă elementul de arie dA este suficient de mic, forța poate fi considerată uniform distribuită pe suprafața acestuia, iar rezultanta dF poate fi aplicată în centrul de greutate al elementului. Mărimea efortului distribuit, aplicat pe unitatea de suprafață din aria secțiunii,

$$p = \frac{dF}{dA} \qquad 1.6\text{-}1$$

se numeşte *tensiune.* Tensiunea **p** are aceeaşi direcție cu forța elementară dF, iar mărimea ei este determinată atât de mărimea forței dF cât şi de orientarea suprafeței dA față de direcția forței.

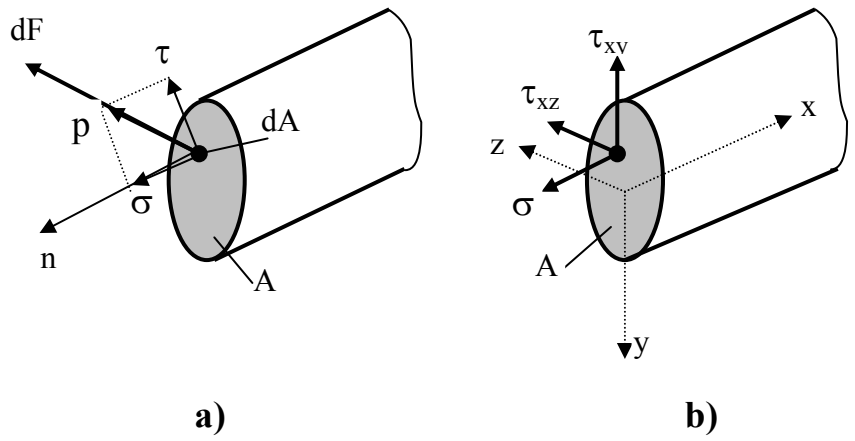


Fig.1.6-1 Tensiuni în secțiunea unei bare

Tensiunea **p** având o direcție oarecare, poate fi descompusă într-o componentă pe direcția normală la secțiune, *tensiune normală* notată cu **σ** şi o componentă în planul secțiunii, *tensiune tangențială* notată cu **τ** (Fig.1.6-1a).

După sensul pe care îl are, tensiunea normală σ are un efect de *tracțiune* sau de *compresiune*, exercitat de către partea de corp înlăturată asupra părții rămase. La fel, tensiunea tangențială τ are un efect de *tăiere, forfecare* sau *alunecare*.

Operațiile vectoriale nu pot fi aplicate tensiunilor, decât numai după ce acestea au fost înmulțite cu ariile respective, adică au fost transformate în forțe.

Din Fig.1.6-1a, rezultă următoarea relație între cele trei tensiuni:

$$p^2 = \sigma^2 + \tau^2 \qquad 1.6\text{-}2$$

Deoarece tensiunea tangențială τ are o direcție oarecare pe secțiune, aceasta se descompune pe cele două axe de coordonate y şi z ale secțiunii, rezultând componentele: τ_{xy} pe direcția y, respectiv τ_{xz} pe direcția z (Fig.1.6-1b). Primul indice indică axa pe care tensiunea este normală, iar cel de-al doilea, axa cu care aceasta este paralelă.

În literatura de specialitate, mai ales în manualele mai vechi, pentru noțiunea de tensiune se mai întâlneşte şi denumirea de *efort specific.*

Deformații şi deplasări

Se consideră acum un cadru solicitat de o forță F (Fig.1.6-2). Sub acțiunea forței F, tronsonul AB se deformează, iar tronsonul BC nu se deformează (nu este solicitat). Se constată că unghiul format de B'C' cu tangenta în B' la fibra deformată AB', nu s-a modificat, a rămas tot de 90^0. În schimb, toate secțiunile cadrului (cu excepția secțiunii A) s-au deplasat în plan. În acest exemplu au apărut două noțiuni: *deformație* şi *deplasare.*

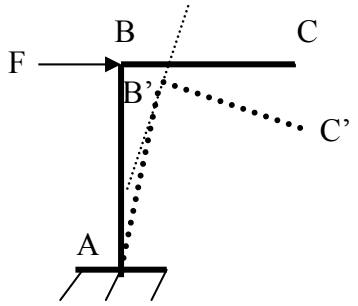


Fig.1.6-2 Deplasări şi deformații

Se consideră acum un corp solid raportat la un sistem de axe ortogonal xyz (Fig.1.6-3). După deformarea corpului, un punct oarecare M al acestuia se deplasează în poziția M'. Vectorul MM' poartă numele de *vectorul deplasării totale.*

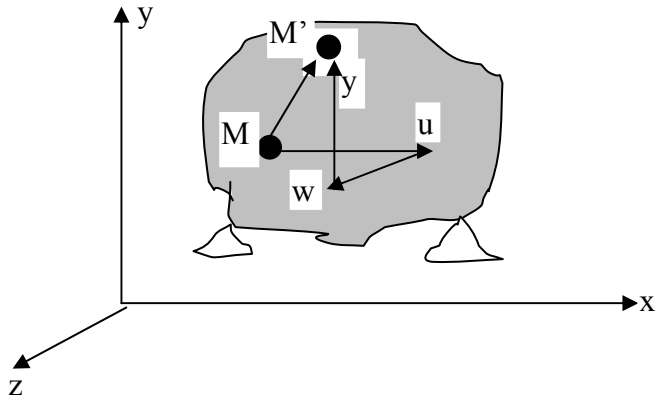


Fig.1.6-3 Deplasările punctelor unui corp solid

Deplasarea totală rezultă ca o sumă a deplasărilor pe trei direcții ortogonale. Deplasările pe cele trei direcții ortogonale se notează astfel:

- pe direcția x cu **u**
- pe direcția y cu **v**
- pe direcția z cu **w**

Deformații specifice

Dacă se decupează din jurul punctului M un element de volum Fig.1.6-4a), laturile acestuia se vor lungi sau scurta, în funcție de solicitare.

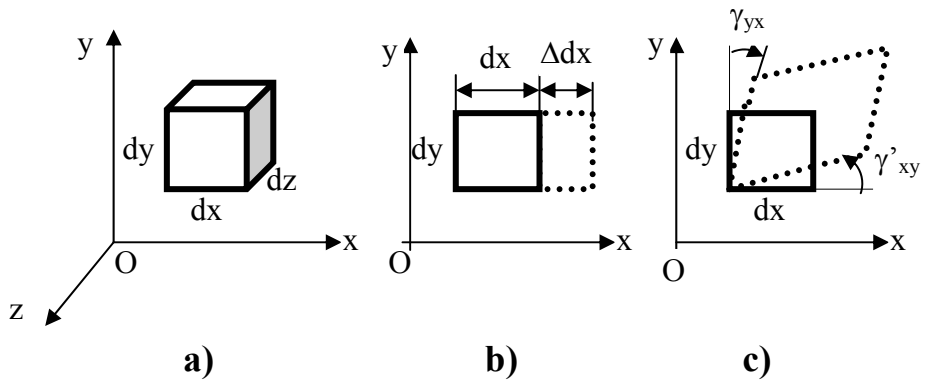


Fig.1.6-4 Deformații specifice

Este greu de închipuit dar mai ales de reprezentat, cum arată un astfel de element după deformare. Din acest motiv, se prezintă deformațiile sale numai în planul xOy, după care este uşor să se imagineze deformațiile şi în celelalte plane: zOy, respectiv xOz. Proiecția acestui element în planul xOy este prezentată în Fig.1.6-4b. Dimensiunea dx a elementului s-a modificat pe direcția x cu Δdx. Pe direcțiile y respectiv z, deformațiile sunt Δdy, respectiv Δdz.

Se numeşte *deformaţie specifică* (*lungire specifică* sau *scurtare specifică*) pe direcția x, y sau z, raportul:

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta dx}{dx}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\Delta dy}{dy} \qquad 1.6\text{-}3$$

$$\varepsilon_z = \frac{\Delta dz}{dz}$$

De cele mai multe ori, deformația specifică se exprimă în procente. *Lungirea specifică* poartă şi denumirea de *alungire.*

De asemenea şi unghiurile drepte dintre plane se modifică (Fig.1.6-4c). Se numeşte *deformaţie specifică unghiulară* sau *lunecare*, mărimea cu care se modifică unghiul drept dintre plane:

$$\gamma_{xy} = \gamma'_{xy} + \gamma_{yx}$$

$$\gamma_{yz} = \gamma'_{yz} + \gamma_{zy} \qquad 1.6\text{-}4$$

$$\gamma_{zx} = \gamma'_{zx} + \gamma_{xz}$$

În concluzie, corpurile suferă două feluri de deformații specifice: *liniare*, respectiv *unghiulare*.

1.7 CONTRACȚIA TRANSVERSALĂ

Practica arată că odată cu lungirea unei bare, apare o micşorare a mărimii secțiunii transversale, mărime numită *contracție transversală* (Fig.1.7-1)

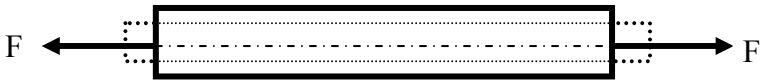


Fig.1.7-1 Contractia transversală

Contracția transversală este proporțională cu lungirea specifică, coeficientul de proporționalitate se notează cu ν şi se numeşte *coeficient de contracție transversală* sau *coeficientul lui Poisson.*

La o lungire specifică ε a barei, contracția transversală este:

$$\varepsilon_{tr} = \varepsilon_y = -\nu \cdot \varepsilon_x \qquad 1.7\text{-}1$$

Semnul (-) arată că cele două mărimi sunt contrare, dacă una creşte, cealaltă scade şi invers.

Se consideră acum o bară cilindrică de lungime l şi aria secțiunii transversale A, solicitată la întindere axială. La un moment dat, lungimea barei este $l\cdot(1+\varepsilon)$, diametrul $d\cdot(1-\nu\varepsilon)$, iar aria secțiunii transversale $A\cdot(1-\nu\varepsilon)^2$. Dacă volumul barei înainte de solicitare a fost A·l, după solicitare el devine:

$$\begin{aligned} V + \Delta V &= A(1-\nu\varepsilon)^2 \cdot l(1+\varepsilon) = \\ &= A \cdot l\left(1 + \varepsilon - 2\nu\varepsilon - 2\nu\varepsilon^2 + \nu^2\varepsilon^2 + \nu^2\varepsilon^3\right) \end{aligned} \qquad 1.7\text{-}2$$

Deoarece lungirile sunt foarte mici, ultimii trei termeni din paranteză se pot neglija, obținându-se:

$$\begin{aligned} &V + \Delta V = A \cdot l + A \cdot l \cdot \varepsilon(1-2\nu) \\ &\text{sau} \\ &\Delta V = \varepsilon(1-2\nu) \cdot A \cdot l \end{aligned} \qquad 1.7\text{-}3$$

Practica arătă, că o astfel de bară solicitată la întindere, îşi măreşte volumul, deci $\Delta V > 0$, de unde rezultă că:

$$1 - 2\nu > 0 \qquad 1.7\text{-}4$$

de unde

$$\nu < 0{,}5 \qquad 1.7\text{-}5$$

Pentru cele mai multe materiale, ν = 0,33, iar pentru materialele care-şi păstrează volumul constant, ν = 0,5.

1.8 IPOTEZE DE BAZĂ ÎN REZISTENȚA MATERIALELOR

Rezistența Materialelor acceptă o serie de ipoteze asupra structurii materialelor şi asupra comportării lor sub acțiunea forțelor exterioare. Aceste ipoteze trebuie să fie în deplină concordanță cu realitatea, iar alteori ele reprezintă simplificări ale fenomenelor reale, care trebuie să conducă însă la rezultate verificate în practică.

Cele mai utilizate ipoteze de către Rezistența Materialelor, sunt:

a) *Ipoteza mediului continuu, omogen şi izotrop.* Rezistența Materialelor consideră materialele ca un mediu *continuu, omogen*, care ocupă întregul spațiu reprezentat de volumul lor. Această ipoteză nu corespunde însă realității. Ea este mai apropiată de realitate la corpurile amorfe şi mai depărtată la cele cristaline. Dă însă rezultate bune în calculele de rezistență.

De asemenea, Rezistența Materialelor consideră materialele *izotrope*, adică ele prezintă în toate direcțiile aceleaşi proprietăți. În caz contra, materialele sunt *anizotrope.*

b) *Ipoteza elasticității perfecte.* Această ipoteză presupune că atâta timp cât solicitările nu depăşesc anumite limite, materialul are o comportare elastică, adică îşi recapătă forma şi dimensiunile inițiale odată cu înlăturarea sarcinilor. În realitate, materialele nu prezintă o elasticitate perfectă, ele având deformații remanente mici, care însă pot fi neglijate în calculele de rezistență.

c) *Ipoteza proporționalității dintre tensiuni şi deformații specifice.* Materialele solicitate în domeniul comportării elastice, prezintă relații liniare de proporționalitate între tensiuni şi deformații specifice, adică satisfac *legea lui Hooke* ($\sigma = E\,\varepsilon$), unde E este un factor de proporționalitate, numit *modul de elasticitate longitudinal al materialului.*

d) *Ipoteza micilor deplasări.* Pentru cele mai multe corpuri, deformațiile elastice sunt de mărimi mici. Ca urmare, corpurile solide sub acțiunea sarcinilor îşi modifică foarte puțin forma inițială. Această ipoteză este cunoscută şi sub denumirea de *ipoteza menținerii dimensiunilor inițiale.* Ea permite scrierea ecuațiilor de echilibru ale staticii pe starea nedeformată a elementului, când nu se iau în considerare deplasările punctelor de aplicație ale forțelor care se produc ca urmare a deformării acestuia. Calculul efectuat pe schema nedeformată, poartă numele de *calcul de ordinul I.*

Ipoteza micilor deplasări nu poate fi acceptată pentru studiul problemelor de stabilitate sau la problemele la care nu pot fi îndeplinite condițiile de echilibru în starea nedeformată.

Calculul de ordinul II admite ipoteza micilor deplasări, dar ecuațiile de echilibru se scriu însă pentru starea deformată a elementului de rezistență.

Calculul de ordinul III nu mai acceptă ipoteza micilor deplasări, el referindu-se la *cazul deformațiilor mari*, când ecuațiile de echilibru trebuie scrise pentru starea deformată.

Chiar dacă materialul satisface legea lui Hooke, în urma calculelor de ordinul II se obțin de obicei relații neliniare între sarcini şi deplasări, iar pentru calculul de ordinul III, rezultă ecuații diferențiale neliniare.

e) *Principiul lui Saint-Venant.* Acest principiu destul de folosit în Rezistența Materialelor, precizează că: *dacă se înlocuiesc forțele care acționează asupra unui corp elastic cu un alt sistem de forțe echivalent din punct de vedere static cu primul, noua distribuție a forțelor produce la locul de aplicare diferențe semnificative față de prima, dar rămâne fără efect sau cu efect neglijabil, la distanțe mari de locul de aplicare al forțelor* (Fig.1.8-1)

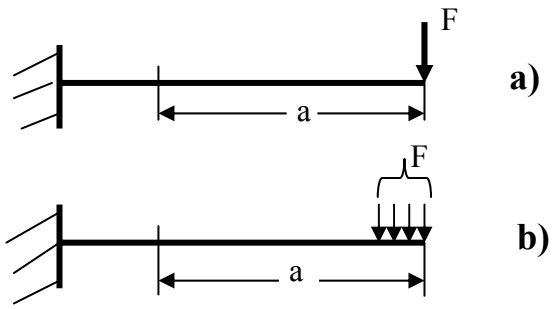


Fig.1.8-1 Principiul lui Saint - Venant

În prima variantă (Fig.1.8-1a) forța F se aplică întru-un punct (forță concentrată), iar în a doua (Fig.1.8-1b) pe o lungime mică de bară. La locul de aplicare a sarcinii F, efectul asupra barei este cu totul diferit de la o variantă la cealaltă. Însă, la o distanță mare de punctul de aplicație, spre exemplu în secțiunea situată la distanța **a** de capătul barei sau chiar în încastrare, ambele bare sunt solicitate la fel.

f) *Ipoteza lui Bernoulli.* Ipoteza lui Bernoulli sau *ipoteza secțiunilor plane*, precizează că: *o secțiune plană şi normală pe axa barei înainte de deformare, rămâne plană şi normală pe axă şi după deformare* (Fig.1.8-2)

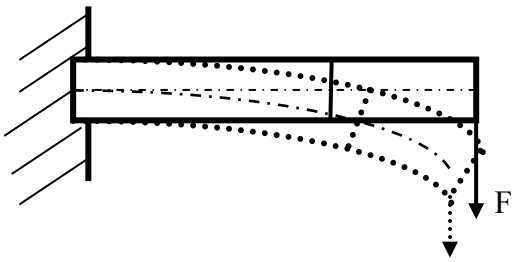


Fig.1.8-2 Principiul lui Bernoulli

g) *Ipoteza stării naturale a corpului,* sau *ipoteza absenței tensiunilor*, conform căreia, pentru un corp nesolicitat, starea de tensiune şi deformație este nulă.

Perfecționarea mijloacelor de calcul şi de investigare, pot conduce la renunțarea la unele ipoteze sau la introducerea altora noi, mai aproape de stările reale. De aici rezultă caracterul de continuă perfecționare a metodelor Rezistenței Materialelor.

1.9 COEFICIENȚI DE SIGURANȚĂ. TENSIUNI ADMISIBILE

O piesă corespunde, dacă tensiunile care iau naştere în ea datorită sarcinilor aplicate, nu depăşesc anumite valori limită, stabilite convențional. Aceste valori limită ale tensiunii sunt corelate cu caracteristicile mecanice ale materialelor.

Tensiunea limită utilizată în calculele de rezistență este cunoscută sub denumirea de *tensiune admisibilă* sau *rezistență admisibilă. Rezistența admisibilă reprezintă valoarea convențională aleasă în calcul, pe baza practicii, pentru tensiunea maximă care poate apare într-o piesă, în condiții date de material şi solicitare.*

Rezistența admisibilă (σ_a, τ_a) poate fi definită față de o *stare limită periculoasă*, stare care trebuie evitată:

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{lim}}{c} \qquad 1.9\text{-}1$$

unde:

σ_{lim} – tensiunea corespunzătoare stării limită periculoase

c - coeficient de siguranță față de starea limită periculoasă considerată.

Alegerea unor valori inferioare pentru rezistența admisibilă față de tensiunea corespunzătoare stării limită periculoase este necesară deoarece:

- cunoaşterea sarcinilor este de cele mai multe ori aproximativă şi o depăşire a acestora este foarte posibilă
- caracteristicile mecanice ale materialelor variază în limite destul de mari, ele fiind influențate de mulți factori
- schema aleasă pentru calcul (aplicarea sarcinilor, schematizarea structurii, ipotezele de calcul, etc.) depărtează modelul față de cel real.

Pentru calculele de verificare, tensiunea efectivă maximă din elementul de rezistență trebuie să fie mai mică sau cel mult egală cu cea admisibilă:

$$\sigma_{ef\ max} \leq \sigma_a \qquad 1.9\text{-}2$$

Valoarea rezistenței admisibile este influențată de foarte mulți factori: *natura materialului, tratamentele termice aplicate piesei, durata de funcționare a piesei, modul de acționare în timp a sarcinilor, felul solicitării, temperatura, gradul de periculozitate în cazul cedării piesei etc.*

De asemenea, valoarea coeficientului de siguranță se alege în principal ținând seama de aceiaşi factori care influențează şi rezistența admisibilă.

Rezistențele admisibile pentru câteva materiale sunt următoarele:

- pentru OL37, solicitare de întindere, compresiune sau încovoiere: σ_a = 150 MPa
- pentru lemn de brad
  - solicitare de compresiune în lungul fibrelor şi încovoiere: σ_a = 10 MPa
  - tracțiune în lungul fibrelor: σ_a = 7 MPa
  - compresiune perpendicular pe fibre: σ_a = 1,5 MPa
  - forfecare în lungul fibrelor: τ_a = 2 MPa
  - forfecare perpendicular pe fibre: σ_a = 4,5 MPa
- terenuri de fundație din pământ uscat sau umed: σ_a = 0,2 ... 0,25 MPa.

2. FORȚE INTERIOARE (EFORTURI). DIAGRAME DE EFORTURI

2.1 DEFINIREA EFORTURILOR ÎN SECȚIUNEA TRANSVERSALĂ A UNEI BARE DREPTE

Se consideră cazul general al unei bare încărcată cu un sistem oarecare de forțe exterioare F_1 ... F_5, care sunt în echilibru (Fig.2.1-1a).

Secționând bara cu un plan perpendicular pe axa longitudinală, aceasta se separă în două părți (PS-partea din stânga şi PD-partea din dreapta), ca în Fig.2.1-1b,c). Sub acțiunea forțelor, cele două porțiuni nu mai sunt în echilibru. Considerând partea din dreapta (PD), pentru restabilirea echilibrului este necesar să se introducă în planul secțiunii (FD-fața din dreapta), o forță rezultantă R şi un moment (cuplu) rezultant M, care să formeze un sistem echivalent cu forțele F_1 ... F_3 care acționează pe partea din stânga (PS) şi care au fost înlăturate.

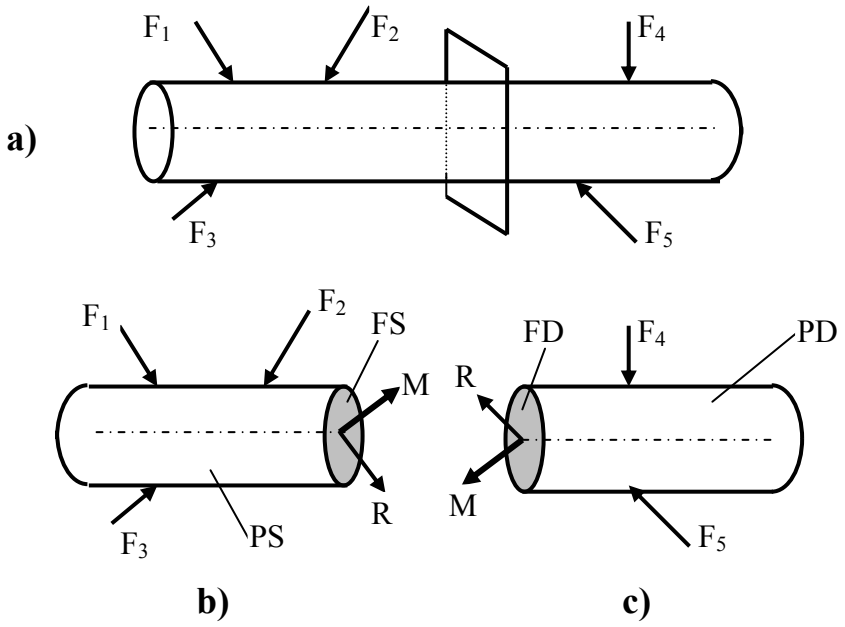


Fig.2.1-1 Evidențierea eforturilor într-o bară

Mărimile R şi M din secțiunea transversală a barei poartă numele de *forțe interioare* sau *forțe în secțiune* sau *eforturi*. Calculul sistemului R, M este echivalent cu forțele exterioare aplicate părții din corp care a fost înlăturată. La fel sistemul R, M ce acționează pe fața din stânga FS (Fig.2.1-1b) este echivalent cu forțele exterioare F_4, F_5 care acționează pe partea din dreapta PD

care a fost înlăturată. Sistemul R, M de pe cele două fețe sunt egale şi de sens contrar, ceea ce asigură echilibru întregului corp.

Dacă se consideră PD (Fig.2.1-1c) asupra ei acționează R, M, F_4 şi F_5, care îşi fac echilibru. Rezultă atunci că R şi M se pot calcula şi din condițiile de echilibru ale părții de corp asupra căreia ele acționează, în cazul nostru PD.

Componentele R şi M se consideră aplicate în centrul de greutate al secțiunii barei.

În concluzie, se poate preciza:

- eforturile R, M acționează în centrul de greutate al secțiunii şi sunt analoage oricăror forțe exterioare aplicate barei. Acestora li se pot aplica ecuațiile de echivalență şi de echilibru cunoscute din mecanica teoretică.
- eforturile R şi M formează un sistem echivalent cu torsorul de reducere în centrul de greutate al secțiunii, a tuturor forțelor exterioare aplicate părții de corp care a fost înlăturată sau un sistem egal şi direct opus cu torsorul forțelor exterioare aplicate părții de corp care se cercetează.

În cazul cel mai general, eforturile R şi M au direcții oarecare față de secțiune. Ele se descompun în componente pe normala la planul secțiunii (pe axa barei) şi în planul secțiunii, rezultând:

a) rezultanta R are o componentă orientată pe normala la secțiune, numită *forță normală* sau *forță axială* şi notată cu N, respectiv o componentă T conținută în planul secțiunii şi numită *forță tăietoare* (Fig.2.1-2)

b) momentul (cuplul) M se descompune în *momentul de torsiune* M_t sau *moment de răsucire*, orientat după normala la secțiune şi în *momentul încovoietor* M_i conținut în planul secțiunii (Fig.2.1-2)

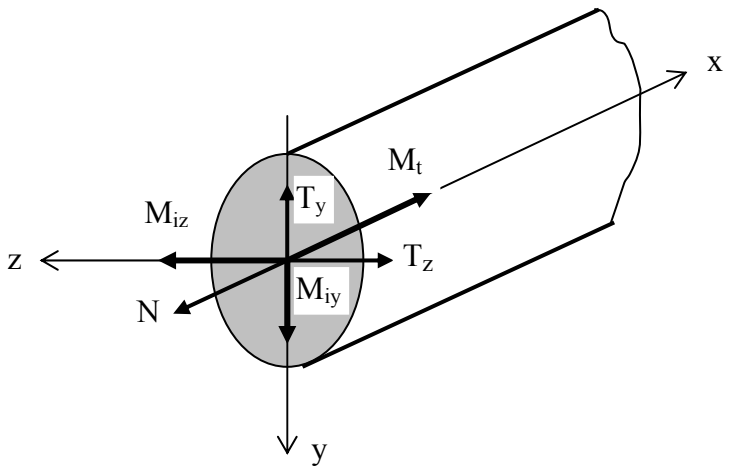


Fig.2.1-2 Eforturile din secțiunea unei bare

Mărimile N, T, M_i, M_t se numesc de asemenea *eforturi*. Fiecare astfel de efort, luat separat, produce în bară o anumită solicitare:

- forța axială N când este orientată față de secțiune ca în Fig.2.1-2 produce o solicitare de *tracțiune* sau *întindere,* iar dacă are sens contrar, o solicitare de *compresiune*
- forța tăietoare T produce o *solicitare de tăiere* sau *de forfecare*
- momentul de torsiune M_t produce *solicitarea de torsiune* sau *de răsucire*
- momentul încovoietor M_i produce *solicitarea de încovoiere*.

Dacă în secțiunea transversală a barei se întâlnesc simultan mai multe solicitări simple, atunci în acea secțiune există o *solicitare compusă.* Forța tăietoare T având o orientare oarecare şi fiind conținută în planul secțiunii, se descompune pe direcțiile y respectiv z, obținându-se componentele T_y şi T_z. La fel şi pentru momentul încovoietor M_i se obțin componentele M_{iy}, respectiv $M_{iz.}$ (Fig.2.1-2). Aşadar, în secțiunea transversală a unui element de rezistență există următoarele componente de eforturi: N (efort axial), T_y, T_z (efort tăietor), M_t (moment de torsiune sau răsucire), M_{iy}, M_{iz} (moment încovoietor).

În realitate eforturile nu sunt concentrate în centrul de greutate al secțiunii, ci sunt distribuite pe întreaga suprafață a acesteia, eforturile reprezentând rezultantele lor.

În Rezistența Materialelor este de mare importanță determinarea *legii de distribuție a eforturilor în lungul elementului* şi valoarea acestora. Eforturile în general diferă de la o secțiune la alta.

Cu cine este egală atunci valoarea unui efort dintr-o secțiune transversală a unui element de rezistență ?

Forța axială *în secțiunea unei bare este egală cu suma algebrică a proiecțiilor pe axa barei a tuturor forțelor exterioare (inclusiv reacțiunile) care acționează asupra părții considerate îndepărtată sau de pe aceeaşi parte dar, cu semn schimbat.*

Forța tăietoare *într-o secțiune este egală cu suma algebrică a proiecțiilor pe normala la axa barei a tuturor forțelor exterioare care acționează asupra părții considerate îndepărtată, sau de pe aceeaşi parte dar, cu semn schimbat.*

Momentul încovoietor *într-o secțiune este egal cu suma algebrică a momentelor încovoietoare ale tuturor forțelor exterioare, plus cuplurile încovoietoare exterioare (inclusiv ale reacțiunilor) care acționează pe partea considerată îndepărtată, sau pe aceeaşi parte dar, cu semn schimbat.*

Momentul de torsiune (răsucire) *într-o secțiune este egal cu suma algebrică a momentelor de torsiune ale tuturor forțelor exterioare, plus cuplurile de torsiune exterioare (inclusiv ale reacțiunilor) care acționează pe partea considerată îndepărtată, sau pe aceeaşi parte, dar cu semn schimbat.*

Pentru a se face suma algebrică, acestor eforturi trebuie să li se asocieze o convenție de semn. Pentru cazul unui sistem plan, convenția de semn pozitiv pentru eforturi este prezentată în Fig.2.1-3.

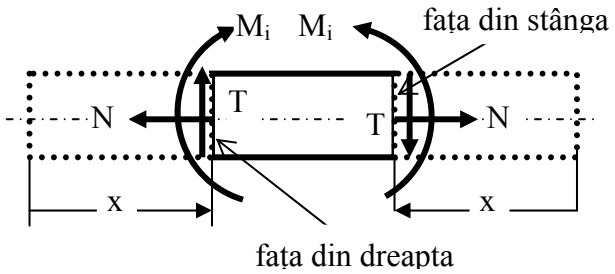
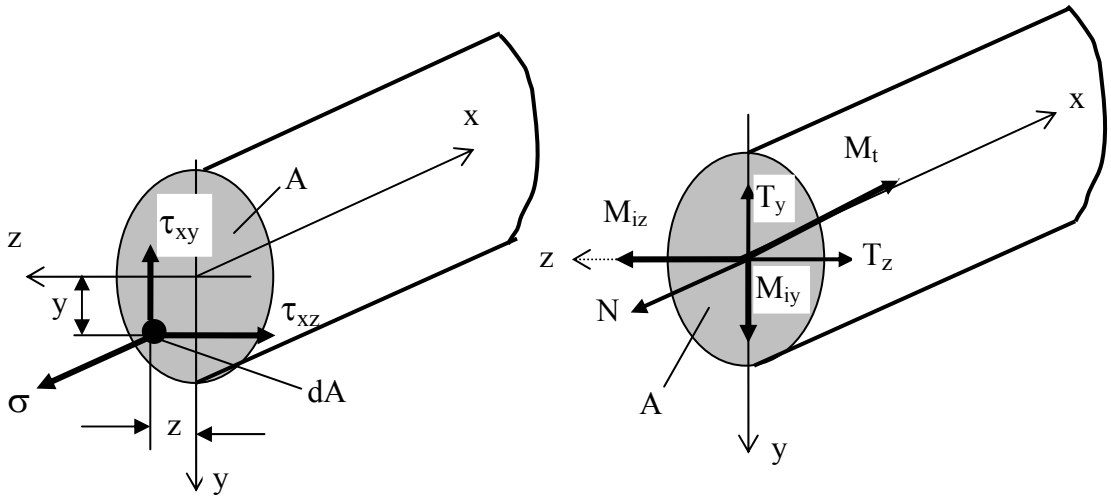


Fig.2.1-3 Convenția de semne pozitive ale eforturilor la o bară dreaptă

2.2 RELAȚII DIFERENȚIALE ÎNTRE EFORTURI ŞI TENSIUNI

Eforturile dezvoltă într-o secțiune a unui element de rezistență tensiuni normale σ şi tangențiale τ , a căror reprezentare este prezentată în Fig.2.2.-1a (vezi şi Fig.1.6-1b). În Fig.2.2-1b sunt reprezentate eforturile din secțiunea barei (vezi şi Fig.2.1-2).



a) **b)**

Fig.2.2-1 Echivalența între tensiuni şi eforturi

Componentele eforturilor se pot exprima în funcție de tensiunile de pe suprafața secțiunii transversale, rezultând un *sistem de ecuații de echivalență* între eforturi şi tensiuni, sau *relațiile diferențiale* între eforturi şi tensiuni:

$$N = \int_A \sigma \cdot dA$$

$$T_y = \int_A \tau_{xy} \cdot dA$$

$$T_z = \int_A \tau_{xz} \cdot dA \qquad 2.2\text{-}1$$

$$M_{iz} = \int_A \sigma \cdot y \cdot dA$$

$$M_{iy} = -\int_A \sigma \cdot z \cdot dA$$

$$M_t = \left(\tau_{xy} \cdot z - \tau_{xz} \cdot y\right) \cdot dA$$

Relațiile 2.2-1 reprezintă cele şase *relații de echivalență între eforturi şi tensiuni*, sau *relațiile diferențiale între eforturi şi tensiuni.*

2.3 RELAȚII DIFERENȚIALE ÎNTRE EFORTURI ŞI SARCINI

Fie o bară dreaptă încărcată cu o sarcină distribuită după o lege oarecare (Fig.2.3-1a). Pe un element de lungime infinit mică dx, se poate considera că sarcina **p** este uniform distribuită (Fig.2.3-1a). Se detaşează elementul de lungime dx şi pe fețele sale se aplică eforturile, considerate pozitive (Fig.2.3-1b). Cum aceste eforturi variază în lungul barei, pe secțiunea din stânga acționează eforturile T şi M_i, iar pe cea din dreapta T+dT şi $M+dM_i$.

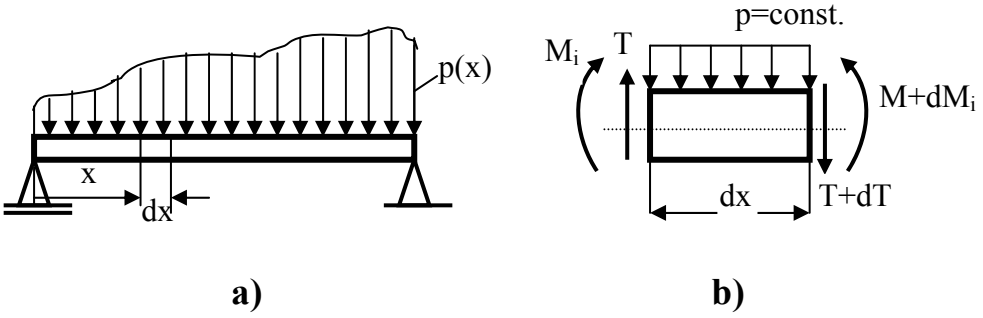


Fig.2.3-1 Echivalența între eforturi şi sarcini

Ecuațiile de echilibru scrise pentru elementul din Fig.2.3-1b, conduc la stabilirea unor relații foarte importante:

$$\left(\sum F\right)_x = 0$$
$$T - p \cdot dx - \left(T + dT\right) = 0$$

de unde rezultă:

$$\frac{dT}{dx} = -p \qquad 2.3\text{-}1$$

Relația 2.3-1 arată că *derivata funcției forței tăietoare în raport cu abscisa secțiunii, este egală cu sarcina distribuită normală la axa barei din acea secțiune, luată cu semn schimbat.*

Asemănător se deduce că *derivata funcției forței axiale în raport cu abscisa secțiunii este egală cu sarcina distribuită axială din acea secțiune, luată cu semn schimbat.*

Suma de momente față de centrul de greutate al secțiunii din dreapta, conduce la:

$$M_i - \left(M_i + dM_i\right) + T \cdot dx - p\frac{(dx)^2}{2} = 0$$

de unde după neglijarea infinitului mic de ordinul doi $(dx)^2/2$, se obține:

$$\frac{dM_i}{dx} = T \qquad 2.3\text{-}2$$

Relația 2.3-2 arată că *derivata funcției momentului încovoietor în raport cu abscisa secțiunii, este egală cu forța tăietoare din acea secțiune.*

Dacă relația 2.3-2 se mai derivează încă o dată în raport cu dx, se obține următoarea relație diferențială între eforturi şi sarcini:

$$\frac{d^2M_i}{dx^2} = \frac{dT}{dx} = -p \qquad 2.3\text{-}3$$

Relațiile diferențiale stabilite între eforturi şi sarcini permit obținerea unor informații deosebit de importante cu privire la traseul diagramelor de eforturi.

Se prezintă în continuare câteva astfel de informații rezultate din relațiile diferențiale dintre eforturi şi sarcini şi de care trebuie ținut seama pentru obținerea unor diagrame de eforturi corecte:

- *Valoarea efortului tăietor într-o secțiune reprezintă tangenta trigonometrică a unghiului pe care îl face cu axa barei, tangenta la diagrama M_i în secțiunea respectivă.*
- *Dacă pe o porțiune (interval) oarecare:*
  - *efortul tăietor $T > 0$ (pozitiv), momentul încovoietor M_i este crescător*
  - *efortul tăietor $T < 0$ (negativ), momentul încovoietor M_i este descrescător*
  - *efortul tăietor T trece prin valoaarea zero schimbând semnul din + (plus) în – (minus), atunci în acea secțiune, momentul încovoietor M_i are un maxim, iar când semnul se schimbă din – în +, momentul încovoietor M_i are un minim*
  - *efortul tăietor T este nul ($T = 0$), momentul încovoietor M_i este constant.*
- *Dacă sarcina distribuită este nulă ($p = 0$) pe un interval (interval neîncărcat), pe acel interval efortul tăietor T este constant (T = const.). Pe acest interval, diagrama momentul încovoietor M_i este reprezentată prin drepte oblice, numai dacă T nu este nul. Dacă $p < 0$, efortul tăietor T, scade.*
- *Pe intervale încărcate cu sarcină uniform distribuită (p = const.), diagrama M_i este o parabolă, iat diagrama T o dreaptă înclinată. În cazul unei distribuții neuniforme a sarcinii distribuite p, ambele diagrame (T şi M_i) sunt curbe a căror formă depinde de tipul sarcinii.*
- *În secțiunile din dreptul forțelor transversale concentrate, diagrama T prezintă o discontinuitate de valoare (salt), egală cu valoarea acelei forțe şi produsă în sensul acesteia, iar diagrama M_i prezintă o discontinuitate de tangentă (o frângere, schimbare de pantă) a porțiunilor vecine ale diagramei.*
- *Dacă sarcina distribuită este orientată în jos ($p < 0$), diagrama M_i este o curbă a cărei convexitate este orientată în jos (Fig.2.3-3a), iar dacă sarcina distribuită este orientată în sus ($p > 0$), diagrama M_i pe acea porțiune are convexitatea în sus (Fig.2.3-3b).*
- *Pe intervale încărcate cu sarcini distribuite liniar, efortul tăietor T variază după o curbă de gradul doi, iar momentul încovoietor M_i după o curbă de gradul trei. Convexitatea diagramei M_i se stabileşte la fel ca în cazul p = const. (Fig.2.3-3). Convexitatea efortului tăietor T, se stabileşte uşor pe baza celor cunoscute din Analiza Matematică.*
- *Pe reazemul articulat de la capătul grinzii, momentul încovoietor M_i este egal cu zero dacă pe acest reazem nu se găseşte un cuplu (moment) concentrat. Dacă în secțiunea de la capătul consolei nu este*

aplicată o forță concentrată, efortul tăietor T pe consolă este egal cu zero.

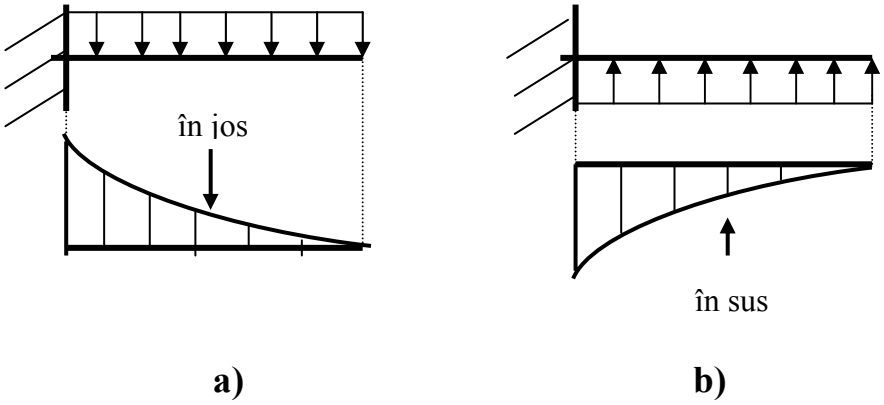


Fig.2.3-3 Convexitatea diagramei momentului încovoietor

- *La capătul încastrat al barei, eforturile T şi M_i sunt egale cu reacțiunea, respectiv momentul din încastrare.*
- *În secțiunile în care se aplică un cuplu concentrat (moment concentrat exterior), diagrama M_i prezintă o discontinuitate în valoare (salt) egală cu valoarea acelui cuplu exterior concentrat şi produsă în sensul de acțiune al cuplului. Asupra diagramei T, acest cuplu exterior concentrat, nu are nici o influență.*

2.4 TRASAREA DIAGRAMELOR DE EFORTURI

Diagramele de eforturi nu sunt altceva decât reprezentarea grafică a funcțiilor eforturilor în lungul unui element de rezistență. Ca urmare, pentru a putea obține diagramele de eforturi pentru un element de rezistență, mai întâi trebuie scrise funcțiile eforturilor în lungul elementului. Scrierea funcțiilor eforturilor se face pe câte un interval caracteristic, care este acea porțiune a elementului pe care funcțiile de eforturi prezintă o funcție unică.

Înainte de scrierea funcțiilor de eforturi şi reprezentarea lor grafică, trebuie calculate şi verificate reacțiunile (vezi calculul şi verificarea reacțiunilor, paragraful 1.5). La scrierea funcțiilor eforturilor pe fiecare interval caracteristic, se ține seama de convenția de semne pozitive ale acestora (vezi convenția, Fig.2.1-3)

2.4.1 Diagrame de eforturi la bare drepte

Pentru barele drepte din exemplele următoare, să se traseze diagramele de eforturi.

Exemplul nr.1 Bara simplu rezemată încărcată cu o forță concentrată (Fig.2.4.1-1)

Bara A-B este solicitată de o forță concentrată F înclinată cu unghiul α față de axa longitudinală a barei

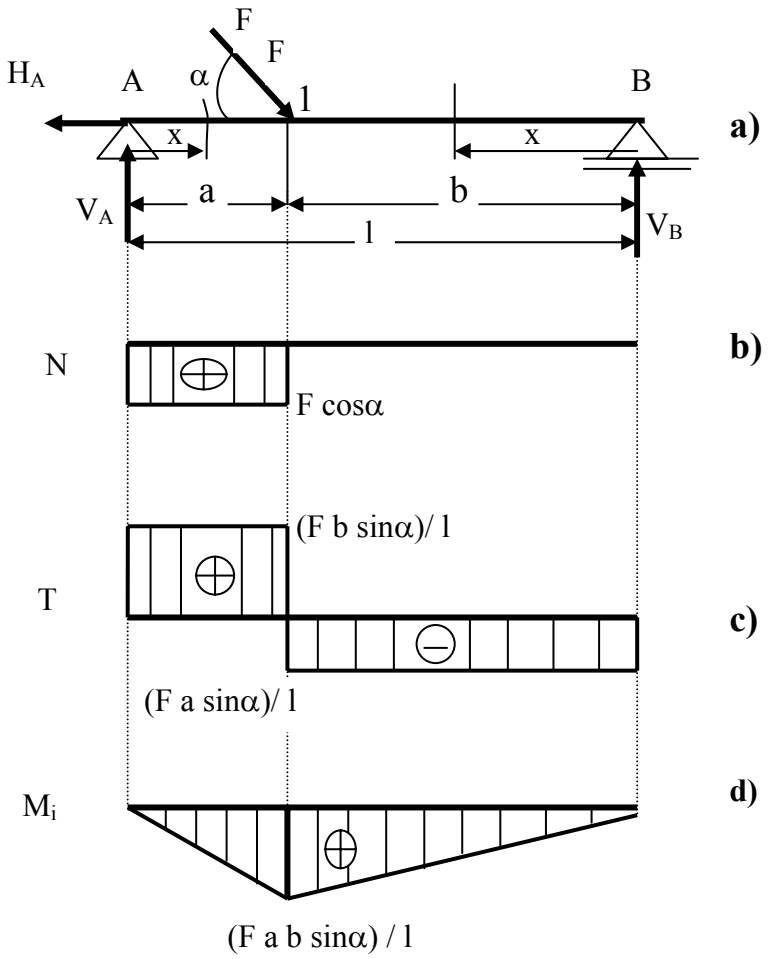


Fig.2.4.1-1

Calculul reacțiunilor. Reacțiunile sunt poziționate în reazeme şi prezentate în Fig.2.4.1-1a.

$$\left(\sum F\right)_x = 0$$

$$H_A - F\cos\alpha = 0$$

de unde rezultă:

$$H_A = F \cos\alpha$$

Pentru calculul reacțiunilor V_A şi V_B se scriu ecuațiile de momente față de reazemele A, respectiv B.

$$\left(\sum M\right)_B = V_A \cdot l - F \cdot \sin\alpha \cdot b = 0$$

de unde se obține

$$V_A = (F\ b \sin\alpha) / l$$

$$\left(\sum M\right)_A = V_B \cdot l - F \cdot \sin\alpha \cdot a = 0$$

de unde se obține

$$V_B = (F\ a \sin\alpha) / l$$

Se trece acum la verificarea reacțiunilor:

$$\left(\sum F\right)_y = V_A - F \cdot \sin\alpha + V_B =$$
$$= \frac{F \cdot a}{l}\sin\alpha - F \cdot \sin\alpha + \frac{F \cdot b}{l}\sin\alpha = \frac{F}{l}(a+b)\sin\alpha - F \cdot \sin\alpha = 0$$

Se poate constata că reacțiunile verifică ecuația de echilibru corespunzătoare, putându-se trece acum la trasarea diagramelor de eforturi.

Funcțiile de eforturi şi trasarea acestora. Funcțiile de eforturi se vor scrie pe fiecare interval caracteristic şi apoi se reprezintă grafic.

Pe intervalul A-1. În Fig.2.4.1-1a se prezintă secțiunea realizată în acest interval şi poziționată prin coordonata x. Se ține seama de convenția de semn a eforturilor şi în acest caz funcțiile eforturilor se scriu pe fața din dreapta a barei.

Efortul axial în secțiunea x, este:

$$N = H_A = F \cos\alpha$$

rezultă un efort axial constant, nu depinde de poziția secțiunii x şi pozitiv. Valorile pozitive pentru efortul axial se reprezintă deasupra axei de valoare zero (deasupra axei longitudinale a barei). Reprezentarea grafică a efortului axial N este prezentată în Fig.2.4.1-1b.

Efortul tăietor T în secțiunea x, este:

$$T = V_A = (F\ b \sin\alpha) / l$$

de asemenea constant, pozitiv, iar reprezentarea grafică este arătată în Fig.2.4.1-1c. Valorile pozitive ale efortului tăietor T se reprezintă deasupra axei de valoare zero (deasupra axei longitudinale a barei).

Momentul încovoietor M_i din secțiunea x, este:

$$M_i = V_A\ x = [(F\ b \sin\alpha) / l\ ]\ x = (F\ x\ b \sin\alpha) / l$$

şi prezintă o variație liniară (depinde liniar de poziția secțiunii x). Se calculează acum valorile momentului la capetele intervalului A-1, adică în secțiunile A, respectiv 1. Se obțin valorile:

- pentru $x = 0$, $M_{iA} = 0$
- pentru $x = a$, $M_{i1} = (F\ a\ b \sin\alpha) / l$

Diagrama rezultată este prezentată în Fig.2.4.1-1d. La momentul încovoietor M_i, valorile pozitive se reprezintă sub axa de valoare zero (sub axa longitudinală a barei), tocmai pentru ca diagrama M_i să apară totdeauna de partea *fibrei întinse a barei*. Această observație trebuie reținută, ea fiind de un real folos la reprezentarea diagramelor de eforturi pentru sistemele spațiale.

Se scriu acum funcțiile de eforturi ***pe intervalul B-1.*** Se parcurge intervalul de la B spre 1 (de la dreapta spre stânga), iar funcțiile eforturilor se scriu pe fața din stânga (atenție la convenția de semne pozitive ale eforturilor pentru această față). Se obțin funcțiile:

- pentru efortul axial

$$N = 0$$

Nu există efort axial pe acest interval.

- pentru efortul tăietor:

$$T = -\ V_B = -\ (F\ a \sin\alpha) / l$$

efort constant, negativ. Valorile negative la efortul tăietor se reprezintă sub axa de valoare zero (sub axa barei). Variația efortului tăietor T pe acest interval este prezentată în Fig.2.4.1-1c.

- pentru momentul încovoietor:

$$M_i = V_B\, x = [(F\, a \sin\alpha) / l\,]\, x = (F\, a\, x\, \sin\alpha) / l$$

variație liniară, valori pozitive.
La capetele intervalului, valorile momentului încovoietor, sunt:

- pentru x = 0,

$$M_{iB} = 0$$

- pentru x = b,

$$M_{il} = (F\, a\, b \sin\alpha) / l$$

Cu aceasta s-a încheiat trasarea diagramelor de eforturi pentru exemplul prezentat. Se poate constata că informațiile date de relațiile diferențiale dintre eforturi şi sarcini (legi de variație, salturi, maxime etc) sunt satisfăcute. Rezultă de aici că diagramele de eforturi prezentate în Fig.2.4.1-1 sunt corecte.

Exemplul nr.2. Bara simplu rezemată încărcată cu sarcină uniform distribuită (Fig.2.4.1-2a)

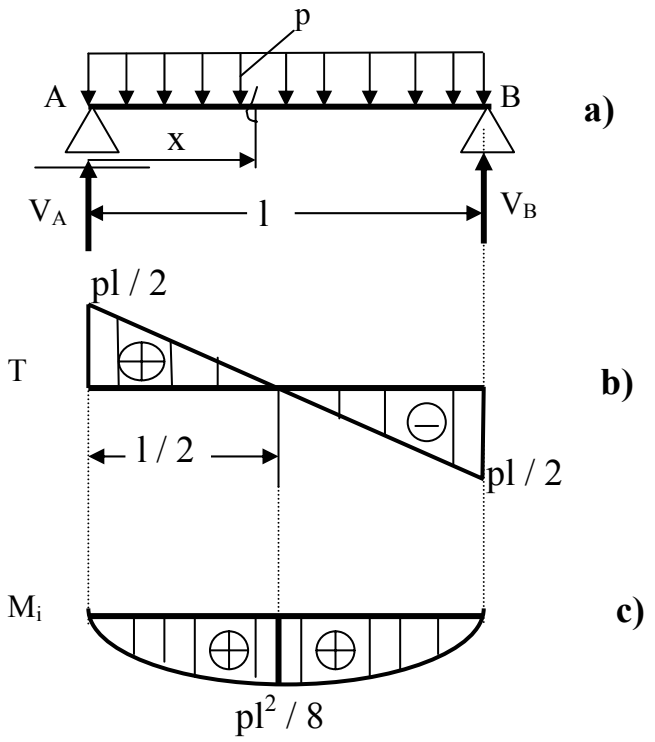


Fig.2.4.1-2

Calculul reacțiunilor. Se poate constata uşor că cele două reacțiuni sunt egale şi au valorile:

$$V_A = V_B = p\,l / 2$$

Nu există reacțiune pe orizontală, deoarece pe această direcție nu există nici acțiune (componente orientate după direcția axei longitudinale a barei).

Funcțiile şi diagramele de eforturi. Pentru acest exemplu, nu există efort axial. Bara prezintă un singur interval caracteristic, intervalul A-B.

Efortul tăietor T în secțiunea x, se scrie pentru fața din dreapta (partea parcursă de la A la x se consideră înlăturată) şi are expresia:

$$T = V_A - p\,x = p\,l / 2 - p\,x$$

variație liniară, semn pozitiv. La capetele de interval, valorile efortului tăietor T sunt:

- pentru x = o,

$$T_A = V_A = p\,l / 2$$

- pentru x = l,

$$T_B = V_A - p\,l = p\,l / 2 - p\,l = -\,p\,l / 2$$

Diagrama de variație a efortului tăietor T este prezentată în Fig.2.4.1-2b. Se observă că efortul tăietor se anulează (este zero), iar în această secțiune momentul încovoietor prezintă extrem. Poziția secțiunii în care T = 0, trebuie determinată. Ea rezultă din condiția:

$$T = p\,l / 2 - p\,x = 0$$

de unde rezultă poziția secțiunii în care efortul tăietor T este nul:

$$x = l / 2$$

Această poziție este prezentată în Fig.2.4.1-2b.

În aceeaşi secțiune x, se scrie funcția momentului încovoietor M_i:

$$M_i = V_A\,x - p\,x\,x / 2 = (p\,l / 2)\,x - p\,x^2 / 2$$

Rezultă o ecuație de gradul doi, care prezintă un extrem la x = l / 2. Valorile momentului încovoietor la capetele intervalului şi valoarea extremă, sunt:

- pentru $x = 0$,

  $M_{iA} = 0$

- pentru $x = l / 2$,

  $M_{i\,extr.} = M_{i\,max} = p\,l^2 / 8$

- pentru $x = l$,

  $M_{iB} = 0$

Diagrama momentului încovoietor M_i pentru acest exemplu este prezentată în Fig.2.4.1-2c. Şi pentru acest exemplu se verifică toate condițiile rezultate din relațiile diferențiale dintre eforturi şi sarcini.

Exemplul nr.3. Bara simplu rezemată încărcată cu sarcină triunghiulară (Fig.2.4.1-3a)

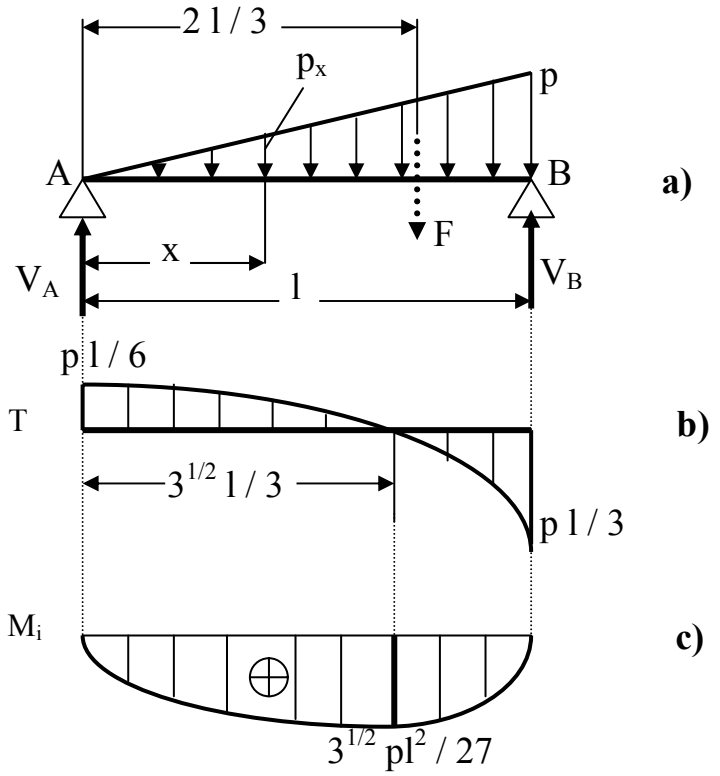


Fig.2.4.1-3

Încărcarea totală a barei este F = p l / 2, care are punctul de aplicație la 2l/3 de reazemul A. Cu această încărcare se calculează reacțiunile cu metodologia cunoscută, iar după efectuarea calculelor se obțin valorile:

$$V_A = \frac{1}{3}F = \frac{p \cdot l}{6}$$

$$V_B = \frac{2}{3}F = \frac{p \cdot l}{3}$$

Într-o secțiune oarecare x (Fig.2.4.1-3a), sarcina distribuită are intensitatea (din asemănare):

$$p_x = \frac{x}{l}p$$

Funcțiile şi diagramele de eforturi.

Efort axial nu există.

Funcția efortului tăietor este:

$$T = V_A - \frac{p_x \cdot x}{2} = \frac{p \cdot l}{6} - \frac{x}{l}p \cdot \frac{x}{2} = \frac{p \cdot l}{6} - \frac{p}{2 \cdot l} \cdot x^2$$

Rezultă o variație parabolică. La capetele intervalului A-B, valorile efortului tăietor T sunt:

- pentru x = 0,

  $T_A = p\,l / 6$

- pentru x = l,

  $T_B = -\,p\,l / 3$

Se constată că efortul tăietor se anulează, poziția acestei secțiuni rezultând din relația:

$$T = \frac{p \cdot l}{6} - \frac{p}{2 \cdot l} \cdot x^2 = 0$$

de unde se obține pentru x valoarea:

$$x = \frac{l}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot l$$

Diagrama efortului tăietor T este prezentată în Fig.2.4.1-3b.

Funcția momentului încovoietor M_i este:

$$M_i = V_A \cdot x - \frac{p_x \cdot x}{2} \cdot \frac{x}{3} = \frac{p \cdot l}{6} \cdot x - \frac{p}{6 \cdot l} \cdot x^3$$

La capetele intervalului şi în secțiunea unde efortul tăietor se anulează, momentul încovoietor M_i are valorile:

- pentru x = 0,

  $M_{iA} = 0$

- pentru $x = l / 3^{1/2} = 0{,}577\ l$,

  $M_{i\,max} = 3^{1/2}\ p\ l^2 / 27$

- pentru x = l,

  $M_{iB} = 0$.

Diagrama momentului încovoietor M_i este prezentată în Fig.2.4.1-3c.

Exemplul nr. 4. Bara simplu rezemată încărcată cu un moment (cuplu) concentrat (Fig.2.4.1-4a)

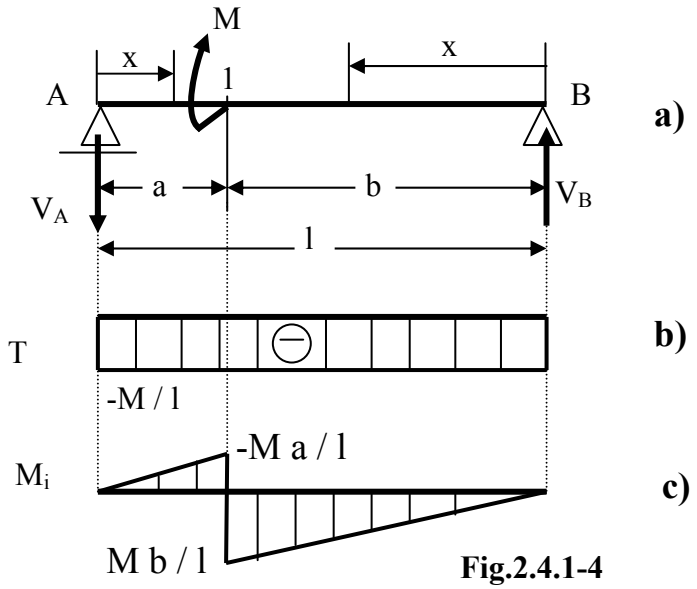


Fig.2.4.1-4

Valorile reacțiunilor sunt:

$$V_A = -V_B = M / l$$

Reacțiunile sunt egale dar de semn contrar.

Funcțiile şi diagramele de eforturi. Pentru această bară există două intervale caracteristice: A-1 şi 1-B.

Intervalul A-1 Se parcurge bara de la stânga la dreapta, deci funcțiile de eforturi se scriu pe fața din dreapta.

Efortul tăietor T are expresia:

$$T = -V_A = -M / l$$

Este constant, negativ şi nu depinde de poziția secțiunii x. Diagrama este prezentată în Fig.2.4.1-4b.

Momentul încovoietor are expresia:

$$M_i = -V_A\, x = (-M / l)\, x,$$

variație liniară şi negativ. La capetele intervalului, valorile momentului încovoietor, sunt:

- pentru x = 0,

$$M_{iA} = 0$$

- pentru x = a,

$$M_{i1} = -M\, a / l$$

Diagrama momentului încovoietor pe acest interval este prezentată în Fig.2.4.1-4c.

Intervalul B-1 Acest interval se rezolvă de la dreapta la stânga, eforturile se scriu pentru fața din stânga (Fig.2.4.1-4a).

Efortul tăietor T, are expresia:

$$T = -V_B = -M / l$$

Este constant şi negativ. Diagrama T este prezentată în Fig.2.4.1-4b.

Momentul încovoietor are expresia:

$$M_i = V_B\, x = (M / l)\, x$$

Variația este liniară, iar la capetele intervalului are valorile:

- pentru x = 0,

$$M_{iB} = 0$$

- pentru x = b,

$$M_{i1} = M\, b / l.$$

Diagrama momentului încovoietor pentru acest interval este prezentată în Fig.2.4.1-4c. Se verifică toate condițiile rezultate din relațiile diferențiale care există între eforturi şi sarcini.

Exemplul nr. 5. Bara încastrată încărcată cu o sarcină concentrată (Fig.2.4.1-5a)

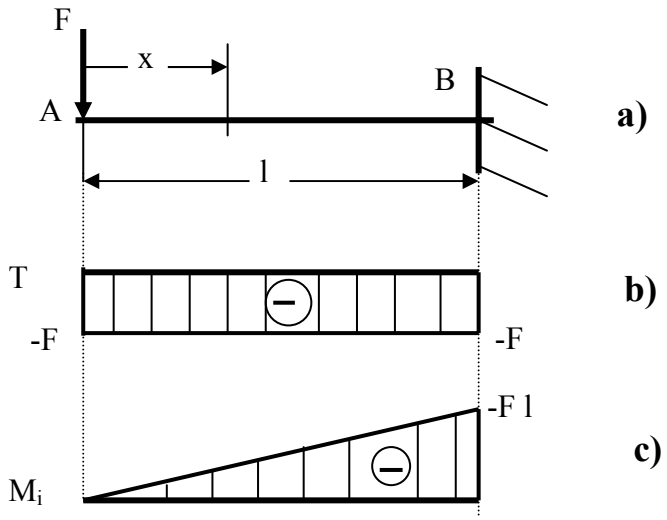


Fig.2.4.1-5

Pentru această bară există un singur interval caracteristic. Pentru scrierea funcțiilor de eforturi nu este necesar să se calculeze reacțiunile, cu condiția ca intervalul să fie parcurs de la stânga la dreapta (Fig.2.4.1-5a), adică scrierea funcțiilor de eforturi să se facă pe fața din dreapta.

Efortul tăietor T, în secțiunea x, are expresia:

$$T = - F$$

Este constant şi negativ. Diagrama este prezentată în Fig.2.4.1-5b.

Momentul încovoietor din secțiunea x, are expresia:

$M_i = - F x$

Momentul încovoietor este negativ şi are variaţie liniară. La capetele intervalului A-B, valorile momentului încovoietor sunt:

- pentru x = 0,

$M_{iA} = 0$

- pentru x = l,

$M_{iB} = - F l.$

Diagrama momentului încovoietor M_i este prezentată în Fig.2.4.1-5c.

Exemplul nr. 6. Bara simplu rezemată multiplu încărcată (Fig.2.4.1-6a)

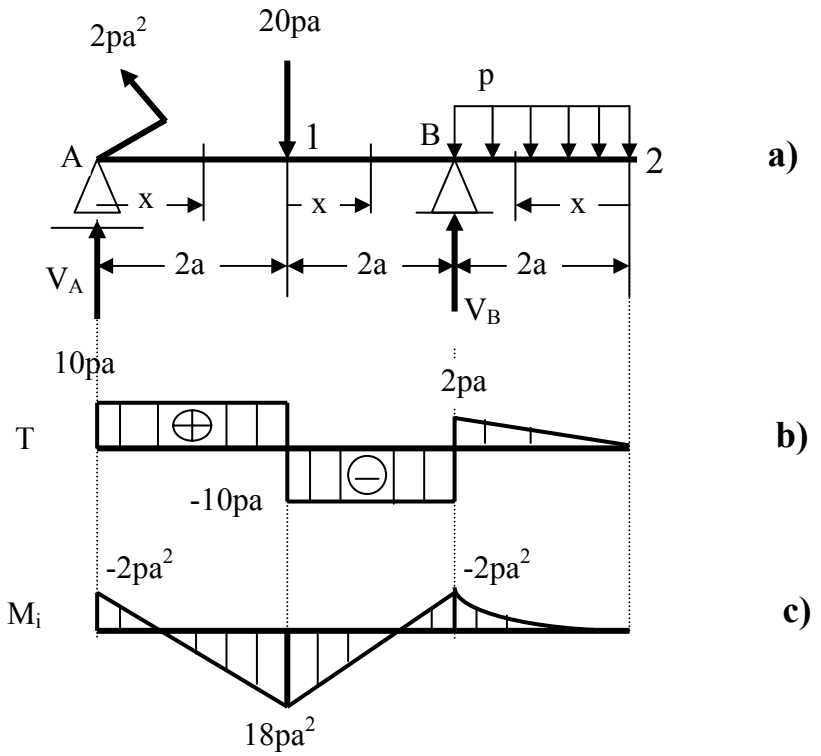


Fig.2.4.1-6

Scriind sumă de momente faţă de reazemele A şi B, rezultă următoarele valori pentru reacţiuni:

$V_A = 10 p a$

$$V_B = 12\ p\ a$$

Funcțiile şi diagramele de eforturi.

Se începe spre exemplu cu ***intervalul A-1***, care se rezolvă parcurgând bara de la stânga la dreapta. Eforturile se scriu în acest caz pa fața din dreapta.

Efortul tăietor are următoarea funcție:

$$T = V_A = 10\ p\ a$$

şi este constant şi pozitiv. Diagrama este prezentată în Fig.2.4.1-6b.

Efortul moment încovoietor M_i, este:

$$M_i = V_A\ x - 2\ p\ a^2 = 10\ p\ a\ x - 2\ p\ a^2$$

şi prezintă o variație liniară. La capetele intervalului A-1, valorile sunt:

- pentru x = 0,

$$M_{iA} = -\ 2\ p\ a^2$$

- pentru x = 2a,

$$M_{i1} = 18\ p\ a^2$$

Diagrama momentului încovoietor M_i este prezentată în Fig.2.4.1-6c.

Pe intervalul 1-B. Şi acest interval se parcurge tot de la stânga spre dreapta.

Efortul tăietor prezintă următoarea lege de variație:

$$T = V_A - 20\ p\ a = 10\ pa - 20\ p\ a = -\ 10\ p\ a$$

Efortul tăietor este constant şi negativ. Diagrama lui T este prezentată în Fig.2.4.1-6b.

Momentul încovoietor este:

$$M_i = V_A\ (2a + x) - 2pa^2 - 20pa\ x = 18\ pa^2 - 10\ pa\ x$$

şi prezintă o variație liniară. La capetele intervalului 1-B, valorile momentului încovoietor, sunt:

- pentru x = 0

$$M_{i1} = 18\ pa^2$$

- pentru x = 2a,

$$M_{iB} = -2\,pa^2$$

Diagrama momentului încovoietor pe acest interval este prezentată în Fig.2.4.1-6c.

Intervalul 2-B. Acest interval se rezolvă parcurgând bara de la dreapta la stânga (este mai uşor deoarece această parte este mai puțin încărcată), deci scriind funcțiile de eforturi pe fața din stânga.

Efortul tăietor T, are expresia:

$$T = p\,x$$

şi prezintă o variație liniară.

La capetele intervalului 2-B, valorile efortului tăietor T, sunt:

- pentru x = 0,

$$T_2 = 0$$

- pentru x = 2a,

$$T_B = 2\,p\,a$$

Diagrama efortului tăietor T este prezentată în Fig.2.4.1-6b.

Momentul încovoietor M_i, este:

$$M_i = -(p\,x)\,x/2 = -p\,x^2 / 2$$

şi prezintă o variație parabolică. La capetele intervalului 2-B, valorile momentului încovoietor, sunt:

- pentru x = 0,

$$M_{i2} = 0$$

- pentru x = 2a

$$M_{iB} = -2\,p\,a^2$$

Diagrama momentului încovoietor pe intervalul 2-B este prezentată în Fig.2.4.1-6c.

Exemplul nr. 7. Diagrame de eforturi la bare cu articulații sau tip Gerber (Fig.2.4.1-7a)

Barele de tip Gerber sau barele cu articulații, sunt acele bare care sunt legate între ele prin articulații. O astfel de articulație are proprietatea că nu transmite momentul (cuplul) de la bară la cealaltă. Forța axială şi tăietoare se transmite printr-o astfel de articulație de la o bară la alta. Rezultă de aici că pentru fiecare astfel de articulație se poate scrie câte o ecuație suplimentară, punând condiția ca în articulație momentul să fie nul. Se spune că o astfel de articulație micşorează gradul de nedeterminare cu o unitate.

Se prezintă în continuare modul de trasare al diagramelor de eforturi pentru barele cu articulații, bare de tip Gerber.

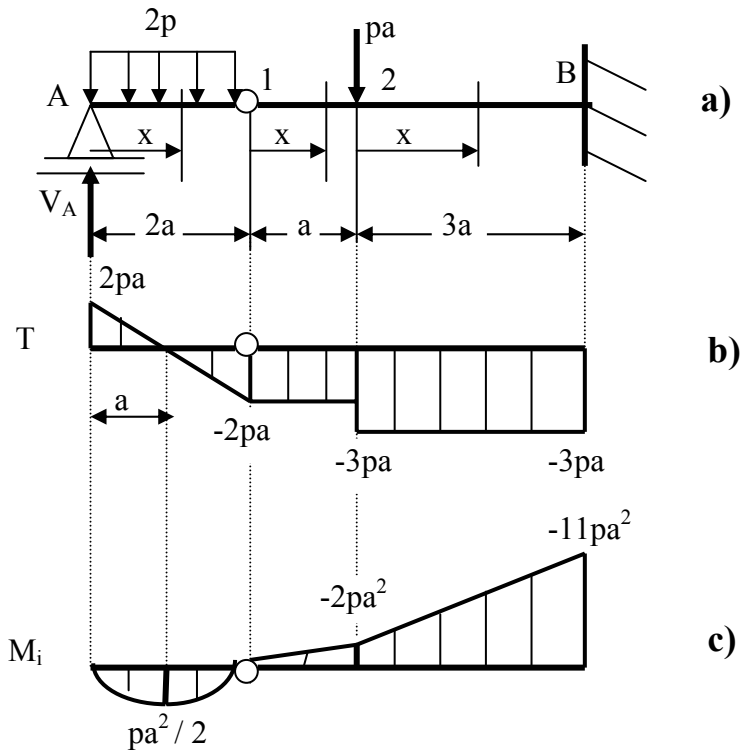


Fig.2.4.1-7

La început bara pare a fi static nedeterminată, existând 4 reacțiuni (3 în încastrare şi una în reazemul mobil). Cum aici există o bară de tip Gerber, în articulația 1 momentul este nul, ceea ce ne permite să mai scriem o ecuație suplimentară (pe lângă cele cunoscute din statică). Ca urmare, acest sistem este static determinat.

Din ecuația de momente din articulația 1, se obține reacțiunea din reazemul A:

$$M_1 = V_A\, 2a - 2p\, 2a\, a = 0$$

de unde:

$$V_A = 2\ pa$$

Diagramele de eforturi pot fi scrise şi fără a se mai calcula reacțiunile din încastrare, cu condiția ca cele trei intervale caracteristice să fie rezolvate parcurgându-le de la stânga la dreapta. Astfel, funcțiile de eforturi se vor scrie pe fața din dreapta a fiecărei secțiuni x (Fig.2.4.1-7a). Efort axial nu există pe nici un interval. Articulația a servit numai pentru scrierea ecuației suplimentare, care ne-a ajutat la determinarea reacțiunii din reazemul mobil. Scrierea funcțiilor de eforturi, mai departe, se va face ca şi când articulația nu ar exista (se neglijează pur şi simplu).

Intervalul A-1. Efortul tăietor are expresia:

$$T = V_A - 2p\ x = 2\ pa - 2p\ x$$

şi o variație liniară. La capetele intervalului A-1, are valorile:

- pentru x = 0,

$$T_A = 2\ pa$$

- pentru x = 2a,

$$T_1 = -\ 2\ pa.$$

Diagrama T pe acest interval este prezentată în Fig.2.4.1-7b. Se constată că efortul tăietor T se anulează pe acest interval, poziția secțiunii respectivă rezultând din condiția:

$$T = 2\ pa - 2p\ x = 0$$

de unde,

$$x = a$$

Momentul încovoietor M_i, este:

$$M_i = V_A\ x - 2p\ x\ x/2 = 2\ pa\ x - p\ x^2 / 2$$

La capetele intervalului A-1, valorile lui M_i, sunt:

- pentru x = 0,

$$M_{iA} = 0$$

- pentru x = a,

$$M_{imax} = pa^2 / 2$$

- pentru x = 2a,

$$M_{i1} = 0.$$

Diagrama M_i pentru acest interval este prezentată în Fig.2.4.1-7c. Se poate observa că în articulația 1, momentul încovoietor este nul.

Intervalul 1-2. Efortul tăietor T, are următoarea expresie:

$$T = V_A – 2p\ 2a = 2\ pa – 4\ pa = -\ 2\ pa$$

şi este constant şi negativ. Diagrama corespunzătoare este prezentată în Fig.2.4.1-7b.

Momentul încovoietor, prezintă următoarea funcție:

$$M_i = V_A\ (2a + x) – 2p\ 2a\ (a + x) = -\ 2\ pa\ x$$

Momentul încovoietor este liniar. La capetele intervalului 1-2, are valorile.

- pentru x = 0,

$$M_{i1} = 0$$

- pentru x = a,

$$M_{i2} = -\ 2\ pa^2.$$

Diagrama lui M_i este prezentată în Fig.2.4.1-7c.

Intervalul 2-B Efortul tăietor T, este:

$$T = V_A – 2p\ 2a – pa = 2\ pa –5\ pa = -\ 3\ pa$$

Efortul tăietor este constant şi negativ. Diagrama de variație a efortului tăietor pe intervalul 2-B, este prezentată în Fig.2.4.1-7b.

Momentul încovoietor M_i pe intervalul 2-B are expresia:

$$M_i = V_A\ (3a + x) – 2p\ 2a\ (2a + x) – pa\ x = -\ 2\ pa^2 – 3\ pa\ x$$

La capetele intervalului 2-B momentul încovoietor, are valorile:

- pentru x = o,

$M_{i2} = - 2\ pa^2$

- pentru x = 3a,

$M_{iB} = - 11\ pa^2$

Diagrama momentului încovoietor rezultată este prezentată în Fig.2.4.1-7c.

2.4.2 Diagrame de eforturi la bare cotite în plan (cadre plane)

Cadrele sunt sisteme de bare a căror axă formează o linie frântă sau ramificată, iar nodurile realizează legături rigide sau articulate. *Un cadru este rigid* dacă nu permite deplasări de tipul celor care se produc în mecanisme, ci numai deformații şi deplasări elastice. În Fig.2.4.2-1, se prezintă câteva forme de cadre rigide.

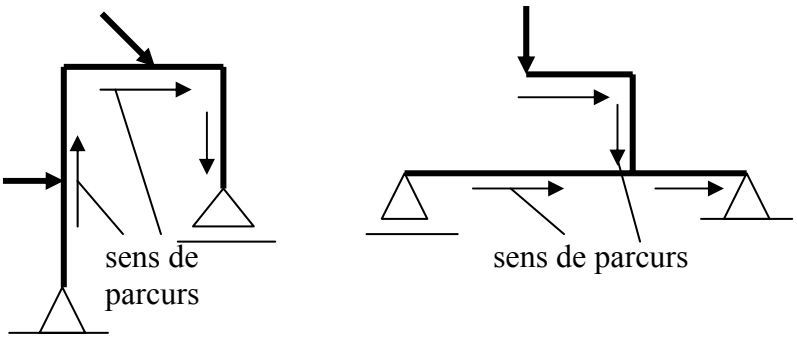


Fig.2.4.2-1

Pentru scrierea funcțiilor de eforturi la bare cotite şi cadre, este indicat să se aleagă *un sens de parcurs* al cadrului (vezi Fig.2.4.2-1). Se precizează că pentru fiecare interval caracteristic se poate alege un anumit sens de parcurgere. Convențiile de semne pozitive sunt cele cunoscute de la bara dreaptă. Pentru intervalele cadrelor care sunt pe verticală, este suficient să se rotească schema cu convenția de semne de la bara dreaptă, până când aceasta se orientează pe verticala (Fig.2.4.2-2). Procedând astfel, nu sunt dificultăți în scrierea funcțiilor şi trasarea diagramelor de eforturi.

Este necesar să se mai precizeze, că atunci când se face suma sarcinilor sau cuplurilor exterioare, aceasta se face pentru toată porțiunea de cadru situată într-o parte sau cealaltă față de secțiunea considerată, secțiune în care se scriu funcțiile de eforturi.

Liniile de valoare zero ale eforturilor, nu mai pot fi puse sub elementul de rezistență ca la barele drepte orizontale. În acest caz, liniile de valoare zero ale eforturilor, urmăresc conturul cadrului şi se aşează separat.

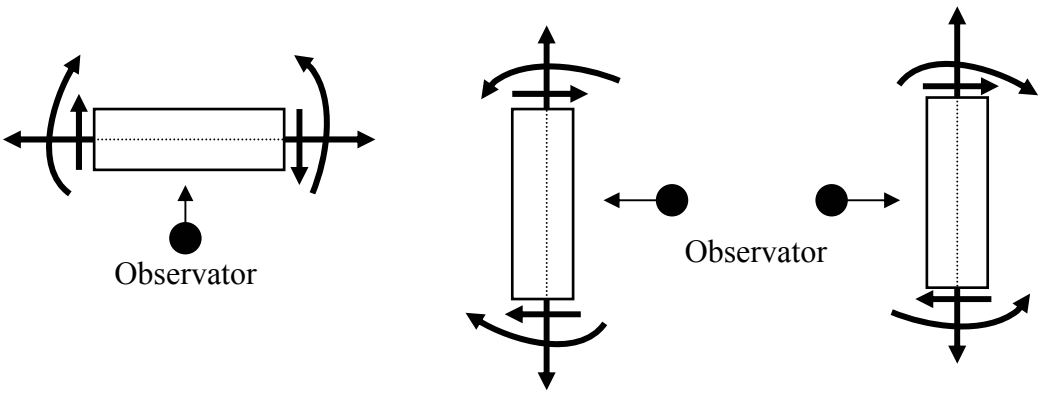


Fig.2.4.2-2

La cadre, pentru barele verticale, poziția observatorului (cel care rezolvă problema) este astfel încât trecerea la porțiunea orizontală să fie făcută fără a trece de cealaltă parte a barei. Pentru cadrele cu contururi închise, rezultă că poziția observatorului trebuie să fie în interiorul cadrului.

Exemplul care urmează, clarifică suficient de bine procedura de scriere a eforturilor şi trasarea diagramelor de eforturi la cadrele plane.

Exemplul nr. 1. *Să se traseze diagramele de eforturi pentru cadrul din Fig.2.4.2-3.*

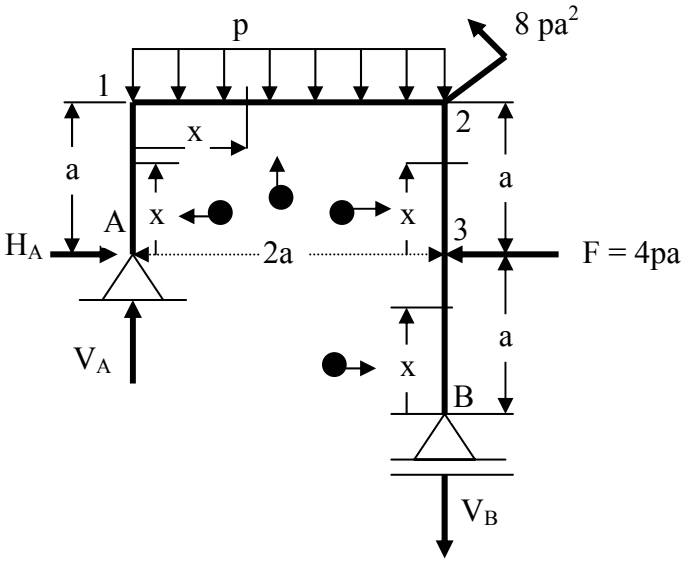


Fig.2.4.2-3

În Fig.2.4.2-3 se prezintă sensurile în care se parcurg intervalele caracteristice, precum şi poziția observatorului față de aceste intervale. Convenția de semne pentru eforturi este uşor de aplicat (vezi Fig.4.2.2-3).

Calculul reacțiunilor a condus la următoarele valori ale acestora:

$H_A = 4$ pa
$V_A = 5$ pa
$V_B = 3$ pa

Intervalul A-1 Efortul axial are expresia:

$$N = - V_A = - 5 \text{ pa}$$

şi este constant şi negativ.

Efortul tăietor este:

$$T = - H_A = - 4\text{pa}$$

constant şi negativ.

Momentul încovoietor este:

$$M_i = - H_A\, x = - 4 \text{ pa } x$$

La capetele intervalului A-1, valorile momentului încovoietor sunt:

- pentru x = 0,

$$M_{iA} = 0$$

- pentru x = a,

$$M_{i1} = - 4 \text{ pa}^2$$

Intervalul 1-2 Efortul axial este:

$$N = - H_A = - 4 \text{ pa}$$

constant şi negativ.

Efortul tăietor are expresia:

$$T = V_A – p\, x = 5 \text{ pa} – p\, x$$

La capetele intervalului 1-2, valorile lui T sunt:

- pentru x = 0,

$$T_1 = 5 \text{ pa}$$

- pentru x = 2a,

$$T_2 = 3\ pa$$

Momentul încovoietor este:

$$M_i = V_A\ x - H_A\ a - p\ x\ x/2 = 5\ pa\ x - 4\ pa^2 - p\ x^2/2$$

La capetele intervalului 1-2, valorile momentului încovoietor sunt:

- pentru x = 0,

$$M_{i1} = -\ 4\ pa^2$$

Intervalul B-3 Efortul axial pe acest interval este:

$$N = 3\ pa$$

constant şi pozitiv.

Efortul tăietor T şi momentul încovoietor M_i pe acest interval sunt nule.

Intervalul 3-2 Efortul axial N este:

$$N = 3\ pa$$

constant şi pozitiv.

Efortul tăietor T are expresia:

$$T = F = 4\ pa$$

constant şi pozitiv.

Momentul încovoietor este:

$$M_i = -\ F\ x = -\ 4\ pa\ x$$

iar la capetele intervalului, are valorile:

- pentru x = 0,

$$M_{i3} = 0$$

- pentru x = a,

$$M_{i3} = -\ 4\ pa^2$$

Diagramele de eforturi pentru acest cadru sunt prezentate în Fig.2.4.2-4.

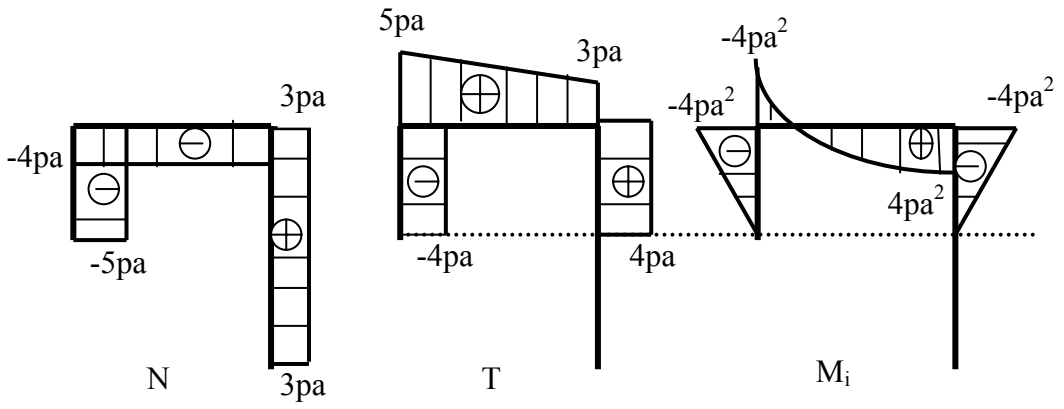
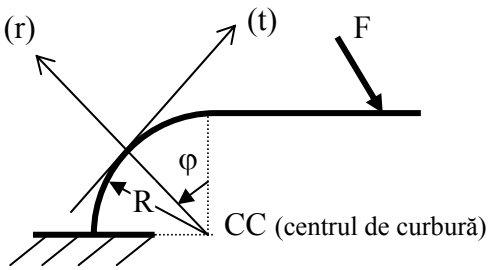


Fig.2.4.2-4 Diagramele de eforturi pentru cadrul din Fig.2.4.2-3

2.4.3 Diagrame de eforturi la bare curbe plane

În secțiunile transversale ale barelor curbe plane solicitate de forțe exterioare situate în planul barei, apar eforturi axiale, tăietoare şi momente încovoietoare. Acestea se definesc la fel ca în cazul barelor drepte.

Pentru porțiunile curbe, variabila liniară x de la barele drepte nu mai poate fi utilizată. Pentru barele curbe, variabila care poziționează secțiunea în care se scriu funcțiile de eforturi este un unghi, fie el notat cu φ (Fig.2.4.3-1).



Fig,2.4.3-1

După cum se cunoaşte de la barele drepte, efortul axial N este situat pe direcție perpendiculară (normală) la secțiune. La porțiunile curbe, o astfel de direcție este tangenta la curbă, notată cu (t) în Fig.2.4.3-1. Efortul tăietor T este un efort conținut în planul secțiunii. Pentru porțiunile curbe plane, această direcție este direcția radială, notată cu (r) în Fig.2.4.3-1, direcție care trece prin secțiune şi prin centrul de curbură CC al barei curbe.

Prin urmare, la barele curbe, *efortul axial* N într-o secțiune oarecare *este egal cu suma algebrică a proiecțiilor pe tangenta la axa barei în secțiunea*

considerată, a tuturor forțelor exterioare, de pe o parte sau de pe cealaltă parte cu semn schimbat.

Efortul tăietor T este numeric *egal cu suma algebrică a proiecțiilor pe direcție radială (normala exterioară) la axa barei în secțiunea considerată a tuturor forțelor exterioare, de pe o parte sau de pe cealaltă parte cu semn schimbat.*

Momentul încovoietor M_i este numeric *egal cu suma algebrică a momentelor față de secțiune, a tuturor forțelor exterioare (inclusiv a cuplurilor) de pe o parte sau de pe cealaltă, cu semn schimbat.*

Convenția de semn pozitiv a eforturilor, pentru cazul barelor curbe plane, rămâne cea stabilită la barele drepte.

Dacă o proiectare directă a forțelor exterioare care acționează pe partea considerată este dificilă, atunci se recomandă reducerea tuturor forțelor exterioare în acea secțiune (Fig.2.4.3-2).

De-a lungul unui arc de cerc, eforturile N, T şi M_i, variază după legea de variația a lui $\sin\varphi$ sau $\cos\varphi$.

Exemplul nr. 1. *Să se traseze diagramele de eforturi pentru bara curbă din Fig.2.4.3-2.*

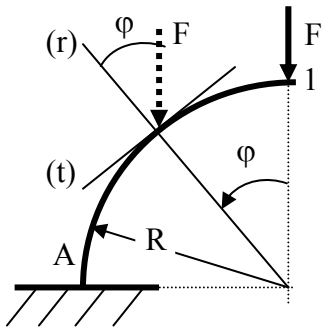


Fig.2.4.3-2

Funcțiile de eforturi. Pentru această bară există un singur interval caracteristic, 1-A. Pentru a putea proiecta mai uşor forța F pe tangentă şi pe normala exterioară la axa barei în secțiunea φ, s-a mutat forța F (reprezentată cu linie întrerupă) în secțiunea în care se scriu eforturile.

Efortul axial N, în secțiunea φ are expresia:

$$N = - F \sin \varphi$$

La capetele intervalului, valorile efortului axial sunt:

- pentru $\varphi = 0$,

$N_1 = 0$

- pentru $\varphi = \pi / 2$,

$N_A = - F$.

Efortul tăietor T, are expresia:

$T = F \cos \varphi$

La capetele intervalului, valorile lui T sunt:

- pentru $\varphi = 0$,

$T_1 = F$

- pentru $\varphi = \pi / 2$,

$T_A = 0$.

Momentul încovoietor pe intervalul 1-A, prezintă expresia:

$M_i = - F R \cos\varphi$

La capetele intervalului 1-A, momentul încovoietor M_i, are următoarele valori:

- pentru $\varphi = 0$,

$M_{i1} = 0$

- pentru $\varphi = \pi / 2$,

$M_{iA} = - F R$.

Diagramele rezultate pentru această bară, sunt prezentate în Fig.2.4.3-3.

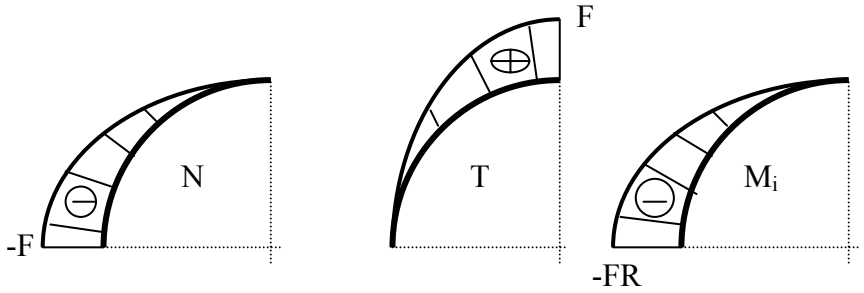


Fig.2.4.3-3 Diagramele de eforturi pentru bara din Fig.2.4.3-2

2.4.4 Diagrame de eforturi la bare drepte cotite în spațiu (cadre spațiale)

Sistemele spațiale sunt printre cele mai răspândite într-o construcție sau structură de rezistență. Ele pot fi formate din bare drepte, curbe sau o combinație a acestora. Cele mai întâlnite sisteme spațiale sunt cele alcătuite din bare drepte.

La sistemele spațiale nu mai pot fi utilizate toate convențiile de semn care s-au folosit la barele drepte plane. La aceste sisteme este recomandat, pentru trasarea diagramelor de eforturi, să se țină seama de următoarele recomandări:

- Diagrama efortului axial N, se poate reprezenta în orice plan al sistemului. În această diagramă se pune semn: plus (+) dacă efortul axial este de întindere şi minus (-) dacă este de compresiune.
- Diagrama efortului tăietor T, se reprezintă în planul în care acționează forțele exterioare normale la axa barei (cele care produc efortul tăietor) şi de aceeaşi parte a barei cu forțele exterioare respective. În diagrama T, nu este nevoie să se pună semn.
- Diagrama momentului încovoietor M_i, se reprezintă pe partea fibrei întinse a barei, iar în diagramă nu se mai pune semn.
- Momentul de torsiune M_t, se poate reprezenta în orice plan, iar în diagramă nu se mai pune semn. "Haşura " diagramei M_t, se face printr-o spirală, tocmai pentru a se deosebi de momentul încovoietor M_i.

Trebuie reamintit faptul că, *o dimensiune a elementului de rezistență, paralelă cu suportul forței, nu constituie braț al forței şi ca urmare produsul dintre forță şi această dimensiune, nu produce niciodată un cuplu (moment).*

De multe ori, mai ales în cazul începătorilor şi pentru sisteme relativ simple, se poate reprezenta pe fiecare interval şi sistemul de axe x,y,z (vezi şi Fig.2.4.4-1)

Exemplul nr. 1. *Pentru cadrul din Fig.2.4.4-1, să se traseze diagramele de eforturi.*

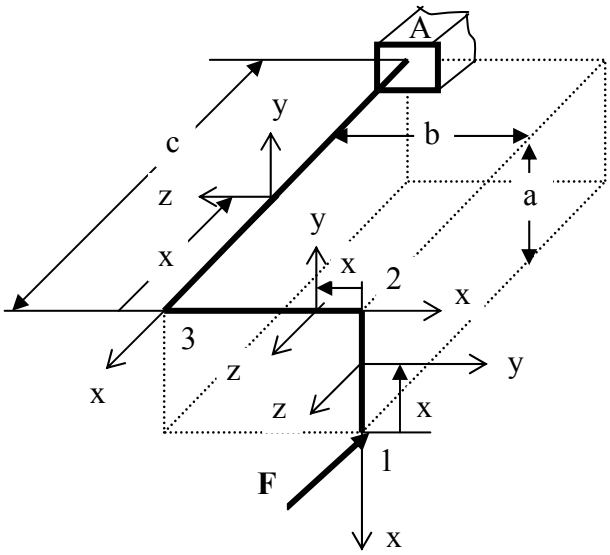


Fig.2.4.4-1

Funcțiile şi trasarea diagramelor de eforturi se face separat pentru fiecare din cele trei intervale caracteristice.

Intervalul 1-2

$N = 0$

$T_y = 0$

$T_z = - F$

$M_x = M_t = 0$

$M_{iz} = 0$

$M_{iy} = F\ x,$

iar la capetele intervalului, M_{iy} are valorile:

- pentru $x = 0$

$$M_{iy1} = F \cdot 0 = 0$$

- pentru $x = a$,

$$M_{iy2} = F\ a$$

Intervalul 2-3

$N = 0$

$T_y = 0$

$T_z = - F$

$M_x = M_t = F\ a$

$M_{iz} = 0$
$M_{iy} = F\ x,$

iar la capetele intervalului 2-3, M_{iy} are valorile:

- pentru x = 0

$$M_{iy2} = F \cdot 0 = 0$$

- pentru x = b,

$$M_{iy3} = F\ b$$

Intervalul 3-A

$N = -F$
$T_y = 0$
$T_z = 0$
$M_x = M_t = 0$
$M_{iz} = F\ a$
$M_{iy} = F\ b.$

Diagramele rezultate sunt prezentate în Fig.2.4.4-2.

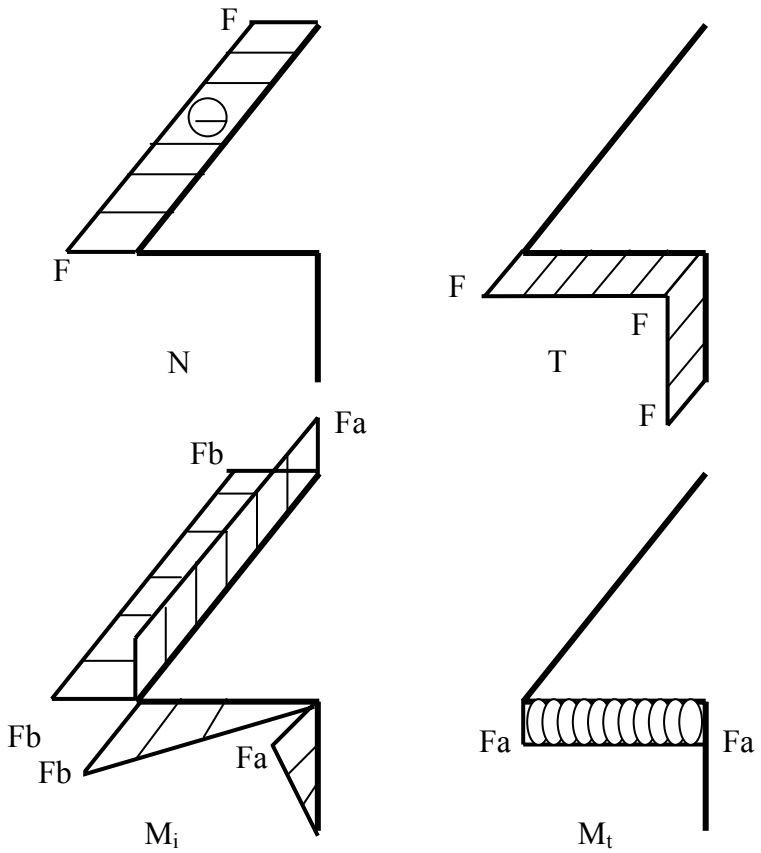


Fig.2.4.4-2 Diagramele de eforturi pentru bara din Fig.2.4.4-1

2.4.5 Bare solicitate prin forțe concentrate mobile. Moment maxim maximorum

În practică sunt numeroase cazurile când elementele de rezistență sunt solicitate prin forțe concentrate care nu au poziții fixe, ci ele se deplasează în lungul elementului sau construcției. În acest sens, se pot aminti roțile unui vehicul pe un pod, roțile căruciorului unui pod rulat, roțile locomotivei şi a vagoanelor pe un pod de cale ferată etc.

O succesiune de forțe concentrate sau distribuite, a căror mărime rămâne constantă şi care se deplasează pe o grindă menținând aceeaşi distanță între ele, se numeşte ***convoi de forțe mobile.***

În timpul mişcării forțelor pe grindă, variază atât valoarea reacțiunilor cât şi cea a eforturilor produse în secțiunile grinzii. Studiul unui astfel de caz, impune determinarea modului de variație al eforturilor într-un număr cât mai mare de secțiuni, în funcție de pozițiile succesive ale convoiului de forțe mobile.

Ca în toate problemele de rezistența materialelor, de mare interes este determinarea valorii maxime ale eforturilor. Valoarea cea mai mare a momentului încovoietor pentru o astfel de solicitare, se numeşte *moment maxim maximorum.*

Calculul momentului maxim maximorum se explică pe exemplul din Fig.2.4.5-1. Se consideră că pe grindă se deplasează un convoi format din **n** forțe concentrate, paralele şi de acelaşi sens F_1, F_2, ... F_i, ... F_n. Se notează cu a_1, a_2, ... a_i, ... a_n şi a_R distanțele forțelor, respectiv a rezultantei acestora R, față de o forță oarecare F_i.

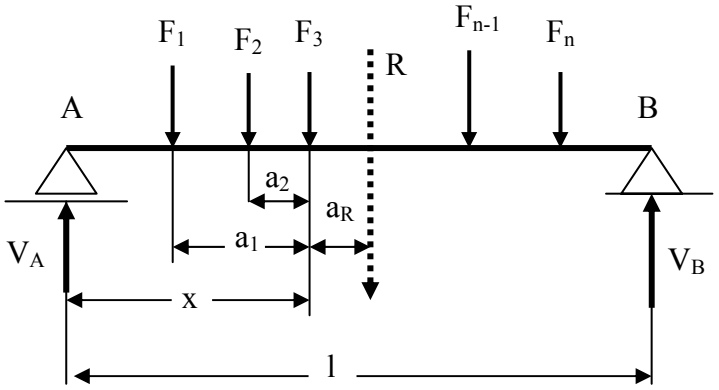


Fig.2.4.5-1

Rezultanta R a forțelor concentrate F_1 ... F_n este dată de relația :

$$R = \sum_{i=1}^{n} F_i \qquad 2.4.5\text{-}1$$

Scriind o ecuație de momente față de punctul de aplicație al forței F_i a tuturor forțelor concentrate aplicate (fără reacțiuni) şi a rezultantei R, se determină poziția rezultantei față de această forță. Poziția rezultantei R (vezi Fig.2.4.5-1), este dată de relația:

$$a_R = \frac{\sum_{i=1}^{n} F_i \cdot a_i}{\sum_{i=1}^{n} F_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} F_i \cdot a_i}{R} \qquad 2.4.5\text{-}2$$

Pentru fiecare poziție a convoiului, se produce un efort tăietor maxim, egal fie cu reacțiunea din reazemul A, fie cu cea din reazemul B. Considerând toate pozițiile posibile ale convoiului, rezultă că cea mai mare valoare a efortului tăietor T este egală cu reacțiunea cea mai mare (maximă):

$$T_{max\,max} = V_{max}$$

O astfel de situație are loc atunci când convoiul ocupă o poziție apropiată de reazemul în care apare această reacțiune.

Cum variația momentului încovoietor este liniară (linii frânte), pentru o poziție oarecare a convoiului, momentul încovoietor maxim se produce în dreptul unei forțe concentrate. În cazul prezentat al grinzii rezemate la capete, momentul încovoietor maxim maximorum are loc pentru o anumită poziție a convoiului, în dreptul unei forțe concentrate, de obicei în dreptul forței concentrate cea mai apropiată de rezultanta R.

Pentru o poziție oarecare a convoiului, funcție de rezultanta R, reacțiunea din reazemul A, este:

$$V_A = \frac{R}{l}\left(l - a_R - x\right) \qquad 2.4.5\text{-}3$$

iar momentul încovoietor din dreptul unei forțe concentrate oarecare F_i, este:

$$M_i = \frac{R}{l}\left(l - a_R - x\right) \cdot x - \sum_{i=1}^{n} F_i \cdot a_i \qquad 2.4.5\text{-}4$$

Pentru a determina valoarea maximă a momentului încovoietor, se derivează în raport cu x relația 2.4.5-4 şi se egalează cu zero:

$$\frac{dM_i}{dx} = \frac{R}{l}\left(l - a_R - 2x\right) = 0 \qquad 2.4.5\text{-}5$$

Din relația 2.4.5-5, se obține distanța x care definește poziția forței F_i, pentru care în dreptul ei se produce momentul încovoietor maxim:

$$x = \frac{l - a_R}{2} \qquad 2.4.5\text{-}6$$

Din relația 2.4.5-6, rezultă că momentul încovoietor atinge valoarea cea mai mare atunci când forța F_i şi rezultanta R a convoiului de forțe de pe grindă se află la aceeaşi distanță de mijlocul grinzii.

Pentru a obține momentul încovoietor maxim maximorum, valoarea lui x dată de relația 2.4.5-6, se înlocuieşte în relația 2.4.5-4. După înlocuire şi efectuarea calculelor, se obține:

$$M_{i\,max\,max} = \frac{R}{l}\left(\frac{l - a_R}{2}\right)^2 - \sum_{i=1}^{n} F_i \cdot a_i \qquad 2.4.5\text{-}7$$

Cazuri particulare:

Exemplul nr. 1. *Pentru grinda din Fig.2.4.5-2, să se determine momentul încovoietor maxim maximorum, dacă forțele F_1 şi F_2, formează un convoi de forțe mobile.*

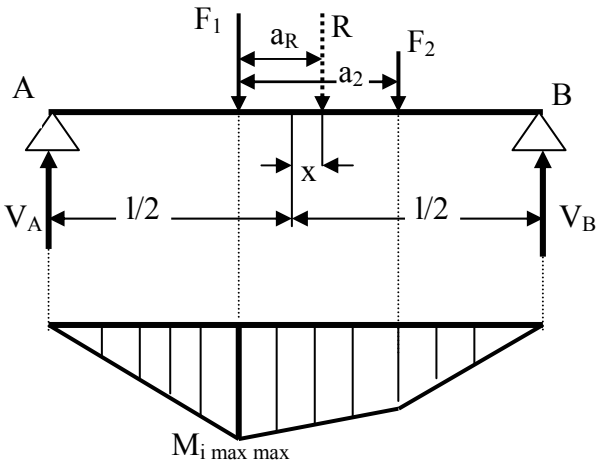


Fig.2.4.5-2

Rezultanta celor două sarcini mobile este:

$$R = F_1 + F_2$$

Scriind sumă de momente față de punctul de aplicație al forței F_1, se determină poziția rezultantei R față de F_1:

$$a_R = \frac{F_2}{R} \cdot a_2 = \frac{F_2}{F_1 + F_2} \cdot a_2$$

Dacă $F_1 > F_2$, momentul maxim are loc în dreptul forței F_1. Se notează cu x distanța dintre rezultanta R şi mijlocul grinzii. Momentul încovoietor maxim, este atunci:

$$M_{i\,max} = V_A \cdot \left[\frac{l}{2} - (a_R - x)\right]$$

unde reacțiunea V_A se calculează scriind o ecuație de momente față de reazemul B şi are valoarea:

$$V_A = \frac{l - 2x}{2l} \cdot R$$

Înlocuind pe V_A în expresia lui $M_{i\,max}$, acesta capătă următoarea formă:

$$M_{i\,max} = \frac{l - 2x}{2l} \cdot R \cdot \left[\frac{l}{2} - \frac{F_2}{R} \cdot a_2 + x\right]$$

În expresia lui $M_{i\,max}$ singura variabilă este x. Momentul încovoietor maxim maximorum se calculează anulând derivata de ordinul întâi în raport cu x a expresiei lui $M_{i\,max}$:

$$\frac{dM_{i\,max}}{dx} - \frac{R}{2l} \cdot \left[\frac{l}{2} - \frac{F_2}{R} \cdot a_2 + x\right] + \frac{l - 2x}{2l} \cdot R = 0$$

Rezolvând ecuația de mai sus, se obține pentru x:

$$x = \frac{F_2}{R} \cdot \frac{a_2}{2} = \frac{F_2}{F_1 + F_2} \cdot \frac{a_2}{2}$$

sau în funcție de distanța a_R,

$$x = \frac{a_R}{2}$$

S-a obținut acelaşi rezultat, ca în cazul precedent şi anume: *momentul maxim maximorum se produce pentru poziția convoiului în care mijlocul grinzii împarte în părți egale distanța dintre rezultanta sarcinilor concentrate ale convoiului şi forța concentrată în dreptul căreia are loc momentul maximmorum.*

Dacă se înlocuieşte valoarea găsită pentru x în expresia lui $M_{i\ max}$, se obține valoarea momentului încovoietor maxim maximorum:

$$M_{i\ max\ max} = \frac{R}{l} \cdot \frac{(l - a_R)^2}{4}$$

Exemplul nr. 2. *Să se calculeze momentul încovoietor maxim maximorum pentru un convoi format din două sarcini egale şi depărtate una de cealaltă cu distanța a (Fig.2.4.5-3).*

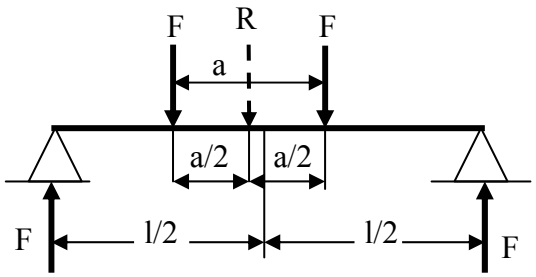


Fig.2.4.5-3

În acest caz, momentul încovoietor maxim maximorum poate avea loc dreptul oricărei forțe. Rezultă că distanța a_R dintre rezultanta R şi cele două forțe concentrate este aceeaşi şi anume:

$$a_R = \frac{a}{2}$$

Momentul încovoietor maxim maximorum are valoarea:

$$M_{i\ max\ max} = \frac{2F}{l} \cdot \frac{\left(l - \frac{a}{2}\right)^2}{4} = \frac{(2 \cdot l - a)^2}{8 \cdot l} \cdot F$$

3. CARACTERISTICI GEOMETRICE ALE SUPRAFEȚELOR PLANE

În relațiile de calcul ale tensiunilor şi deformațiilor elementelor de rezistență, de secțiunea transversală a acestora se ține seama prin nişte mărimi, numite *caracteristici geometrice.*

Fie, spre exemplu, aceeaşi bară solicitată de acelaşi sistem de forțe exterioare, dar aşezată față de sistemul forțelor în două variante (Fig.3-1). Cu toate că barele sunt identice, se constată că cea din stânga prezintă o rezistență la încovoiere mai mare. În acelaşi timp, nici deplasările barei în cele două variante nu sunt aceleaşi. Comportarea diferită se explică prin aceea că modificarea poziției secțiunii transversale față de planul forțelor, modifică caracteristicile geometrice ale secțiunii transversale ale barei.

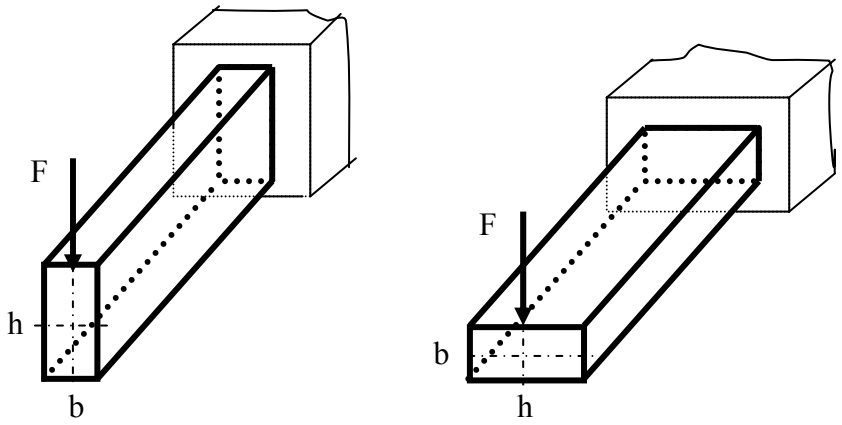


Fig.3-1

Pentru efectuarea calculelor de rezistență şi rigiditate, cunoaşterea caracteristicilor geometrice ale suprafeței secțiunii transversale a elementelor de rezistență este absolut necesară.

Caracteristicile geometrice ale suprafeței secțiunii transversale a elementelor de rezistență care intervin în calcule, sunt:

- aria suprafeței
- momentul static
- momentul de inerție
  - axial

- centrifugal
- polar
- raza de inerție (giație)
- modulul de rezistență

Fie o suprafață plană de arie A, pe care se ia un element infinit mic de arie dA şi un sistem de axe rectangulare zOy, (Fig.3-2). Cu G s-a notat centrul de greutate al suprafeței, iar poziția lui față de sistemul zOy este dată de y_G, respectiv z_G. Poziția suprafeței elementare dA față de acelaşi sistem de coordonate este dată de coordonatele y, respectiv z.

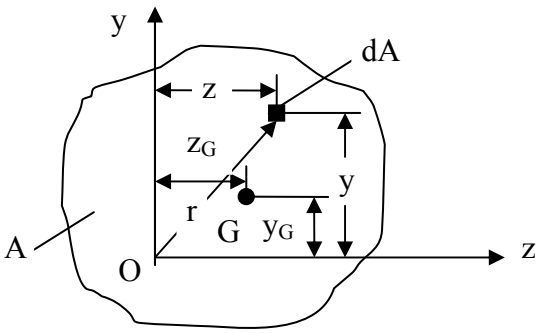


Fig.3-2

3.1.1 Aria suprafeței A (Fig.3-2), se defineşte ca fiind:

$$A = \int_A dA \qquad 3.1\text{-}1$$

Aria suprafeței se măsoară în [mm^2].

3.2 Momentul static. Prin definiție, momentele statice ale suprafeței de arie A în raport cu axele Oz, respectiv Oy (Fig.3-2) sunt date de relațiile:

$$S_z = \int_A y \cdot dA$$
$$S_y = \int_A z \cdot dA \qquad 3.2\text{-}1$$

Momentul static poate fi pozitiv, negativ sau nul. El se măsoară în [mm^3].

Dacă suprafața se poate descompune în suprafețe simple la care se cunosc pozițiile centrelor de greutate față de sistemul de referință, expresiile momentelor statice, capătă următoarea formă:

$$S_z = \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot A_i = y_G \cdot A$$
$$S_y = \sum_{i=1}^{n} z_i \cdot A_i = z_G \cdot A \qquad 3.2\text{-}2$$

Din relațiile 3.2-2, rezultă că poziția centrului de greutate G a unei suprafețe compuse, poate fi determinată cu relațiile:

$$y_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i \cdot A_i}{A}$$
$$z_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} z_i \cdot A_i}{A} \qquad 3.2\text{-}3$$

Se constată (relația 3.2-2) că dacă axele sistemului de referință trec prin centrul de greutate ($y_G = z_G = 0$), momentele statice sunt nule. Axele în raport cu care momentele statice sunt nule şi care trec prin centrul de greutate al suprafeței, se numesc *axe centrale.*

3.3 Momente de inerție

Se numesc ***momente de inerție axiale,*** față de axele z, respectiv y, (Fig.3-2), mărimile date de expresiile:

$$I_z = \int_A y^2 \cdot dA$$
$$I_y = \int_A z^2 \cdot dA \qquad 3.3\text{-}1$$

Momentele de inerție axiale se exprimă în [mm^4] şi sunt totdeauna pozitive.

Momentul de inerție centrifugal, calculat față de sistemul de referință zOy, este dat de expresia:

$$I_{zy} = \int_A z \cdot y \cdot dA \qquad 3.3\text{-}2$$

Momentul de inerție centrifugal se exprimă în [mm^4] şi poate fi pozitiv, negativ sau nul.

Se consideră o suprafață dreptunghiulară pe care, față de axa de simetrie Oy, se iau două suprafețe elementare de arie dA, simetrice față de Oy (Fig.3.3-1).

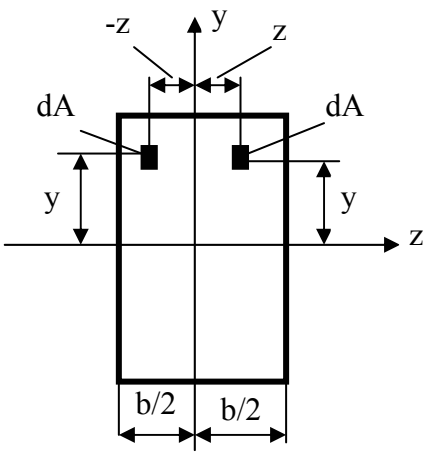


Fig.3.3-1

Făcând suma momentelor de inerție centrifugale pentru cele două suprafețe elementare dA (din stânga şi din dreapta față de Oy), se obține:

$$I_{zy} = \int_{A_{dr}} z \cdot y \cdot dA + \int_{A_{st}} (-z) \cdot y \cdot dA = \int_{A_{dr}} z \cdot y \cdot dA - \int_{A_{st}} z \cdot y \cdot dA = 0 \qquad 3.3\text{-}3$$

Acelaşi raționament se poate face pentru întreaga suprafață, de unde rezultă că $I_{zy} = 0$. Rezultă că, *pentru o suprafață plană care are cel puțin o axă de simetrie, momentul de inerție centrifugal față de sistemul care conține acea axă de simetrie, este nul.*

Momentul de inerție polar al suprafeței în raport cu un punct (pol) O, este definit prin relația:

$$I_O = I_p = \int_A r^2 \cdot dA \qquad 3.3\text{-}4$$

unde r, este distanța de la polul O la elementul de arie dA. Momentul de inerție polar se exprimă în [mm^4] şi este totdeauna pozitiv.

Dacă se are în vedere că,

$$r^2 = y^2 + z^2$$

relația 3.3-4, capătă forma:

$$I_p = \int_A \left(y^2 + z^2\right) \cdot dA = \int_A y^2 \cdot dA + \int_A z^2 \cdot dA = I_z + I_y \qquad 3.3\text{-}5$$

adică, *momentul de inerție polar este egal cu suma momentelor de inerție față de două axe perpendiculare oarecare şi care trec prin polul considerat*.

3.4 Raza de girație sau **raza de inerție** este o mărime întâlnită în calculele de rezistență, fiind definită de relațiile:

$$i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}} \quad ; \quad i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} \qquad 3.4\text{-}1$$

Se exprimă în [mm] şi este pozitivă.

3.5 Modulul de rezistență se determină pe baza momentelor de inerție axiale, prin relațiile:

$$W_{z,min} = \frac{I_z}{y_{max}} \quad ; \quad W_{z,max} = \frac{I_z}{y_{min}}$$
$$W_{y,min} = \frac{I_y}{z_{max}} \quad ; \quad W_{y,max} = \frac{I_y}{z_{min}} \qquad 3.5\text{-}1$$

unde:

y_{max}, y_{min} reprezintă distanța de la axa z la punctele extreme cele mai depărtate, respectiv cele mai apropiate ale suprafeței, de această axă,

z_{max}, z_{min} reprezintă distanța de la axa y la punctele extreme cele mai depărtate, respectiv cele mai apropiate ale suprafeței, de această axă.

Modulele de rezistență se exprimă în [mm^3] şi au sens numai pentru valorile pozitive. Din acest motiv, în relațiile 3.5-1, distanțele de la axe la punctele secțiunii cele mai depărtate, respectiv cele mat apropiate (y_{max}, y_{min}, z_{max}, z_{min}), se iau în valoare absolută.

În cazul suprafețelor compuse, *modulul de rezistență* ***nu*** *se obține prin însumarea algebrică a modulelor de rezistență ale suprafețelor simple componente, ci numai prin intermediul momentului de inerție axial, pe baza relațiilor 3.5-1.*

3.6 Momente de inerție şi module de rezistență pentru câteva suprafețe simple

3.6.1 *Suprafață dreptunghiulară*

Fie suprafața dreptunghiulară din Fig.3.6.1-1 pe care se ia ca suprafață elementară, fâşia de arie dA = b dy.

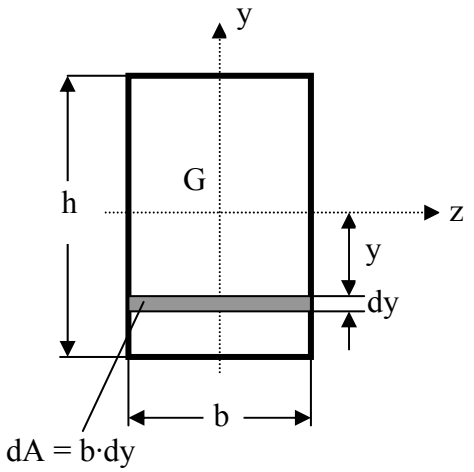


Fig.3.6.1-1

Aplicând relațiile 3.3-1 pentru calculul *momentelor de inerție*, se obține:

$$I_z = \int_A y^2 \cdot dA = \int_{-h/2}^{h/2} y^2 \cdot b \cdot dy = \left.\frac{b \cdot y^3}{3}\right|_{-h/2}^{h/2} = \frac{b \cdot h^3}{12} \qquad 3.6.1\text{-}1$$

Luând o fâşie paralelă cu axa Gy de arie dA = b dz, se obține momentul de inerție față de axa centrală Gy. Momentele de inerție axiale ale dreptunghiului de dimensiuni h, respectiv b, sunt date de relațiile:

$$I_z = \frac{b \cdot h^3}{12} \;;\quad I_y = \frac{b^3 \cdot h}{12} \qquad 3.6.1\text{-}2$$

Pentru un pătrat la care laturile sunt egale, (h = b = a) momentele de inerție față de axele centrale rezultă din relațiile 3.6.1-2 şi au expresia:

$$I_z = I_y = \frac{a^4}{12} \qquad 3.6\text{-}1\text{-}3$$

Modulele de rezistență față de axele centrale sunt date de relațiile:

$$W_{z,\min} = W_{\max} = \frac{I_z}{y_{\max,\min}} = \frac{\frac{b \cdot h^3}{12}}{\frac{h}{2}} = \frac{b \cdot h^2}{6}$$

$$W_{y,\min} = W_{y,\max} = \frac{I_y}{z_{\max,\min}} = \frac{\frac{b^3 \cdot h}{12}}{\frac{b}{2}} = \frac{b^2 \cdot h}{6} \qquad 3.6.1\text{-}4$$

3.6.2 ***Suprafață circulară***

Din motive de simetrie, pentru suprafețele circulare momentele de inerție față de orice diametru (care reprezintă şi axe centrale), sunt aceleaşi. Se poate scrie atunci:

$$I_z = I_y \qquad 3.6.2\text{-}1$$

iar relația 3.3-5, devine:

$$I_p = I_z + I_y = 2\, I_z \qquad 3.6.2\text{-}2$$

Mai întâi se calculează momentul de inerție polar, luând ca suprafață elementară o coroană de rază r şi grosime dr, de arie dA =2 π r dr (Fig.3.6.2-1):

$$I_p = \int_0^R r^2 \cdot dA = \int_0^R r^2 \cdot 2\pi r \cdot dr = \frac{\pi \cdot R^4}{2} = \frac{\pi \cdot d^4}{32} \qquad 3.6.2\text{-}3$$

Ținând seama de relația 3.6.2-2, se obține relația pentru momentele de inerție axiale:

$$I_z = I_y = \frac{I_p}{2} = \frac{\frac{\pi \cdot d^4}{32}}{2} = \frac{\pi \cdot d^4}{64} \qquad 3.6.2\text{-}4$$

Şi modulele de rezistență față de orice diametru sunt egale şi se calculează cu relațiile:

$$W_{z,min} = W_{z,max} = W_{y,min} = W_{y,max} = \frac{I_z}{\frac{d}{2}} = \frac{\pi \cdot d^3}{32} \qquad 3.6.2\text{-}5$$

iar modulul de rezistență polar este:

$$W_p = \frac{I_p}{\frac{d}{2}} = \frac{\pi \cdot d^3}{16} \qquad 3.6.2\text{-}6$$

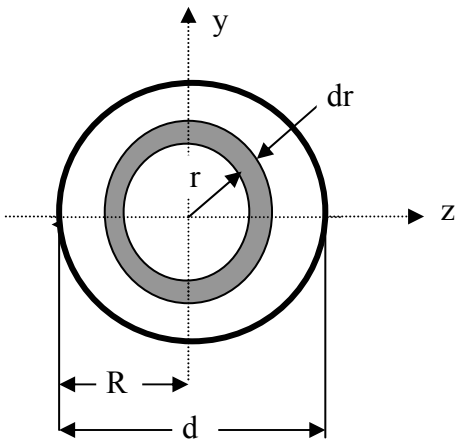


Fig.3.6.2-1

3.6.3 ***Secțiune inelară.*** Calculul momentelor de inerție axiale pentru o secțiune circulară cu diametrul interior d şi diametrul exterior D, se face ca pentru suprafața circulară cu observația că integrala pentru I_p se face între limitele d/2 şi D/2 (sau altfel între R_i şi R_e).

Se obțin, relațiile:

$$I_p = \frac{\pi \cdot D^4}{32}\left(1 - k^4\right) \; ; \; I_z = I_y = \frac{\pi \cdot D^4}{64}\left(1 - k^4\right) \qquad 3.6.3\text{-}1$$

$$W_p = \frac{\pi \cdot D^3}{16}\left(1 - k^4\right); \quad W_z = W_y = \frac{\pi \cdot D^3}{32}\left(1 - k^4\right) \qquad 3.6.3\text{-}2$$

unde k = d / D.

3.7 VARIAȚIA MOMENTELOR DE INERȚIE FAȚĂ DE AXE PARALELE

Se consideră o suprafață oarecare de arie A, pe care se ia un element de arie dA. Fie de asemenea sistemul de axe central zGy față de care se cunosc momentele de inerție I_z, I_y, I_{zy} şi un sistem de axe z_1Oy_1 paralele cu cel central (Fig.3.7-1). Se caută să se determine momentele de inerție I_{z1}, I_{y1}, I_{z1y1}, față de sistemul de axe paralel cu cel central z_1Oy_1, la distanțele **c**, respectiv **d** de acesta.

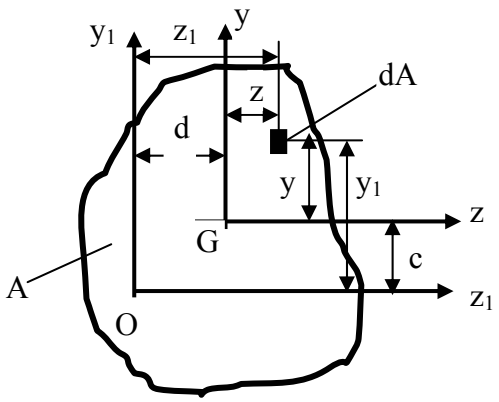


Fig.3.7-1

3.7.1 Momente de inerție axiale

Pe baza relațiilor de definire şi a notațiilor din Fig.3.7-1, pentru momentele de inerție față de axele Oz_1, Oy_1 se poate scrie:

$$I_{z_1} = \int_A y_1^2 \cdot dA = \int_A (y+c)^2 \cdot dA = \int_A y^2 \cdot dA + 2c \cdot \int_A y \cdot dA + c^2 \cdot \int_A dA = \\ = I_z + 2c \cdot S_z + c^2 \cdot A = I_z + c^2 \cdot A \qquad 3.7.1\text{-}1$$

$$I_{y_1} = \int_A z_1^2 \cdot dA = \int_A (z+d)^2 \cdot dA = \int_A d^2 \cdot dA + 2d \cdot \int_A z \cdot dA + d^2 \cdot \int_A dA = \\ = I_y + 2d \cdot S_y + d^2 \cdot A = I_y + d^2 \cdot A \qquad 3.7.1\text{-}2$$

Relațiile 3.7.1-1 şi 3.7.1-2, arată că: *momentul de inerție față de o axă oarecare este egal cu momentul de inerție față de o axă paralelă cu ea, trecând prin centrul de greutate, la care se adaugă produsul dintre aria suprafeței şi pătratul distanței dintre cele două axe.*

Din relațiile 3.7.1-1, 3.7.1-2 rezultă de asemenea că momentul de inerție față de o axă centrală (care trece prin centrul de greutate), este cel mai mic din infinitatea de momente de inerție față de axe paralele cu ea.

3.7.2 Momente centrifugale

Pe baza relației de definire şi a notațiilor din Fig.3.7-1, pentru momentul de inerție centrifugal față de sistemul de axe z_1Oz_1 se poate scrie:

$$\begin{aligned} I_{z_1y_1} &= \int_A y_1 \cdot z_1 \cdot dA = \int_A (y+c)\cdot(z+d)\cdot dA = \\ &= \int_A y \cdot z \cdot dA + c \cdot \int_A z \cdot dA + d \cdot \int_A y \cdot dA + c \cdot d \cdot \int_A dA = \\ &= I_{zy} + c \cdot S_y + d \cdot S_z + c \cdot d \cdot A = I_{zy} + c \cdot d \cdot A \end{aligned} \qquad 3.7.2\text{-}1$$

Relația 3.7.2-1 arată de asemenea că *momentul de inerție centrifugal față de un sistem de axe oarecare este egal cu momentul de inerție centrifugal față de un sistem paralele cu el, trecând prin centrul de greutate al suprafeței la care se adaugă produsul dintre aria suprafeței şi distanțele dintre axele sistemelor respective.*

În literatura de specialitate, relațiile 3.7.1-1, 3.7.1-2 şi 3.7.2-1 sunt cunoscute sub numele de *relațiile lui Steiner*.

3.8 VARIAȚIA MOMENTRLOR DE INERȚIE FAȚĂ DE AXE ROTITE. DIRECȚII ŞI MOMENTE DE INERȚIE PRINCIPALE

Fie suprafața plană din Fig.3.8-1 de arie A şi pe care se ia o suprafață elementară de arie dA. Pentru sistemul de axe zOy se cunosc momentele de inerție I_z, I_y, I_{zy} şi se caută relații pentru momentele de inerție pentru un sistem de axe z_1Oy_1 rotit cu un unghi α față de cel central (I_{z1}, I_{y1}, I_{z1y1} = ?).

Față de sistemul de axe z_1Oy_1, elementul de arie dA, are coordonatele:

$$\begin{aligned} y_1 &= PR = PQ - RQ = y \cdot \cos\alpha - z \cdot \sin\alpha \\ z_1 &= NM = NP + PM = OR + PM = z \cdot \cos\alpha + y \cdot \sin\alpha \end{aligned} \qquad 3.8\text{-}1$$

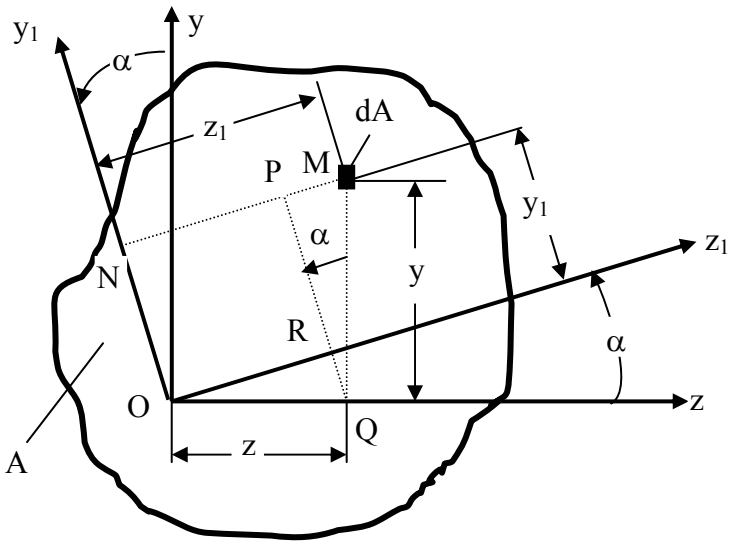


Fig.3.8-1

Pe baza relațiilor de definire ale momentelor de inerție, ale notațiilor din Fig. 3.8-1 şi ale relațiilor 3.8-1, momentele de inerție față de sistemul rotit z_1Oy_1, sunt:

$$
\begin{aligned}
I_{z_1} &= \int_A y_1^2 \cdot dA = \int_A \left(y \cdot \cos\alpha - z \cdot \sin\alpha\right)^2 \cdot dA \\
&= \cos^2\alpha \cdot \int_A y^2 \cdot dA - 2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha \int_A y \cdot z \cdot dA + \sin^2\alpha \cdot \int_A z^2 \cdot dA = \\
&= I_z \cdot \cos^2\alpha - I_{zy} \cdot \sin 2\alpha + I_y \cdot \sin^2\alpha = \\
&= I_z \cdot \cos^2\alpha + I_y \cdot \sin^2\alpha - I_{zy} \cdot \sin 2\alpha
\end{aligned}
\qquad 3.8\text{-}2
$$

$$
\begin{aligned}
I_{y_1} &= \int_A z_1^2 \cdot dA = \int_A \left(z \cdot \cos\alpha + y \cdot \sin\alpha\right)^2 \cdot dA = \\
&= \cos^2\alpha \cdot \int_A z^2 \cdot dA + 2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha \int_A y \cdot z \cdot dA + \sin^2 \cdot \int_A y^2 \cdot dA = \\
&= I_y \cdot \cos^2\alpha + I_{zy} \cdot \sin 2\alpha + I_z \cdot \sin^2\alpha = \\
&= I_z \cdot \sin^2\alpha + I_y \cdot \cos^2\alpha + I_{zy} \cdot \sin 2\alpha
\end{aligned}
\qquad 3.8\text{-}3
$$

Momentul de inerție centrifugal față de sistemul rotit, are expresia:

$$I_{z_1y_1} = \int_A y_1 \cdot z_1 \cdot dA = \int_A (y \cdot \cos\alpha - z \cdot \sin\alpha) \cdot (z \cdot \cos\alpha + y \cdot \sin\alpha) \cdot dA =$$

$$= \cos^2 \int_A yz \cdot dA + \sin\alpha \cdot \cos\alpha \int_A y^2 dA - \sin\alpha \cdot \cos\alpha \int_A z^2 dA - \sin^2 \int_A zy \cdot dA = \qquad 3.8\text{-}4$$

$$= (I_z - I_y) \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha + I_{zy} \cdot (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)$$

Dacă în relațiile 3.8-1 ... 3.8-4 se înlocuiesc $sin^2\alpha$ şi $cos^2\alpha$ prin expresiile:

$$\sin^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \quad ; \quad \cos^2\alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

şi se efectuează calculele, relațiile pentru momentele de inerție față de sistemul rotit, capătă următoarea formă:

$$I_{z_1} = \frac{I_z + I_y}{2} + \frac{I_z - I_y}{2} \cdot \cos 2\alpha - I_{zy} \cdot \sin 2\alpha$$

$$I_{y_1} = \frac{I_z + I_y}{2} - \frac{I_z - I_y}{2} \cdot \cos 2\alpha + I_{zy} \cdot \sin 2\alpha \qquad 3.8\text{-}5$$

$$I_{z_1y_1} = \frac{I_z - I_y}{2} \cdot \sin 2\alpha + I_{zy} \cdot \cos 2\alpha$$

Din relația 3.8-5, se observă că între momentele de inerție axiale şi cel polar, există următoarea relație:

$$I_{z_1} + I_{y_1} = I_z + I_y = I_p \qquad 3.8\text{-}6$$

adică, *suma momentelor de inerție axiale în raport cu orice pereche de axe ortogonale care trec printr-un pol dat, este o constantă şi egală cu momentul de inerție polar.*

Prin rotirea sistemului de axe, din relațiile 3.8-4 rezultă că momentele de inerție variază, însă suma lor rămâne constantă. Deci, există atunci o poziție a sistemului de axe, pentru care momentele de inerție au valori extreme: maxim, respectiv minim.

Direcții principale de inerție

Valoarea unghiului α pentru care momentele de inerție axiale au valori extreme, se determină anulând derivatele funcțiilor (relațiile 3.8-5) în raport cu unghiul 2α:

$$\frac{dI_{z_1}}{d(2\alpha)} = -\frac{I_z - I_y}{2}\cdot\sin 2\alpha - I_{zy}\cdot\cos 2\alpha$$
$$= -\left(\frac{I_z - I_y}{2}\cdot\sin 2\alpha + I_{zy}\cdot\cos 2\alpha\right) = -I_{z_1y_1} = 0 \qquad 3.8\text{-}7$$

de unde rezultă

$$\mathrm{tg}2\alpha = -\frac{2\cdot I_{zy}}{I_z - I_y} \qquad 3.8\text{-}8$$

Unghiul de rotire al sistemului față de cel de referință, pentru care momentele de inerție prezintă valori extreme, rezultă din relația 3.8-8 şi este:

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}\cdot\mathrm{arctg}\left(-\frac{2\cdot I_{zy}}{I_z - I_y}\right) \qquad 3.8\text{-}9$$

Poziția celeilalte direcții este perpendiculară pe cea dată de unghiul α_1.

Din relația 3.8-8 se constată că față de aceste direcții rotite pentru care momentele de inerție axiale prezintă valori extreme, momentul de inerție centrifugal I_{z1y1} este nul. Atunci se poate afirma că *momentele de inerție axiale au valori extreme în raport cu direcțiile față de care momentul de inerție centrifugal este nul.* Aceste direcții se numesc *direcții principale,* iar momentele de inerție față de aceste direcții poartă numele de *momente de inerție principale.*

În calculele de rezistență, interesează în mod special poziția direcțiilor principale care trec prin centrul de greutate al suprafeței, aşa numitele *direcții principale centrale* şi evident *momentele de inerție principale centrale.*

Direcțiile principale de inerție se notează cu 1, respectiv 2. Axa principală 1 corespunde direcției față de care momentul de inerție principal are valoarea maximă, iar axa principală 2 pentru direcția față de care momentul de inerție principal are valoarea minimă.

Poziționarea direcțiilor principale pe secțiune se face după semnul unghiului α_1. Dacă semnul este (+), rotirea se face de la axa z spre y pe drumul cel mai scurt, iar dacă semnul este (-), rotirea se face de la axa z spre axa y pe drumul cel mai lung (invers decât în cazul precedent).

Momente de inerție principale

Momentele de inerție principale se notează cu litera **I** la care se pune indicele 1 sau 2, după cum valoarea acestuia este maximă sau minimă. Există atunci moment de inerție principal 1 (notat I_1), respectiv moment de inerție principal 2 (notat I_2).

Pentru determinarea momentelor de inerție principale se înlocuiesc unghiurile α_1 şi $\alpha_2 = \alpha_1 + \pi / 2$ date de relația 3.8-9 în primele două relații ale sistemului 3.8-5. Pentru obținerea unor expresii mai simple se ține seama de relațiile:

$$\sin 2\alpha = \frac{\mathrm{tg}2\alpha}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2 2\alpha}} \;;\quad \cos 2\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2 2\alpha}} \qquad 3.8\text{-}10$$

După înlocuiri şi efectuarea calculelor se obțin expresiile pentru momentele de inerție principale:

$$\begin{aligned} I_{max} &= I_1 = \frac{I_z + I_y}{2} + \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\left(I_z - I_y\right)^2 + 4\cdot I_{zy}^2} \\ I_{min} &= I_2 = \frac{I_z + I_y}{2} - \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\left(I_z - I_y\right)^2 + 4\cdot I_{zy}^2} \end{aligned} \qquad 3.8\text{-}11$$

Relațiile de calcul (3.8-11) pentru momentele de inerție principale, pot fi grupate într-o singură expresie de forma:

$$I_{1,2} = \frac{I_z + I_y}{2} \pm \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\left(I_z - I_y\right)^2 + 4\cdot I_{zy}^2} \qquad 3.8\text{-}12$$

Dacă momentul de inerție centrifugal este negativ ($I_{zy} < 0$), direcția principală care trece prin primul cadran (definit de sistemul zGy) este direcția principală 1.

Pentru suprafețele cu cel puțin o axă de simetrie, direcțiile centrale Gz, Gy sunt şi principale de inerție. De asemenea şi momentele de inerție axiale I_z, I_y sunt momente de inerție principale.

3.9 APLICAȚII

Exemplul nr. 1. *Pentru suprafața plană din Fig.3.9-1 să se calculeze direcțiile principale, momentele de inerție principale şi modulele de rezistență față de direcțiile centrale.*

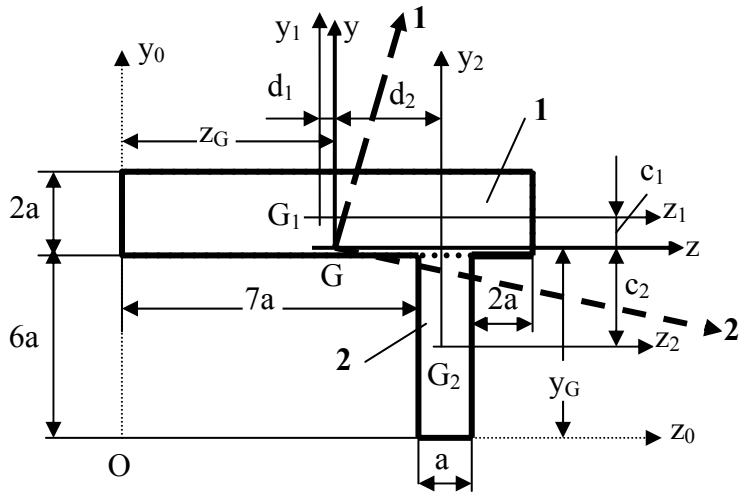


Fig.3.9-1

Suprafața din Fig.3.9-1 s-a împărțit în două suprafețe simple (notate cu 1 şi 2) la care s-au fixat centrele de greutate G_1 şi G_2 şi sistemul de axe central pentru fiecare suprafață simplă ($z_1G_1y_1$ şi $z_2G_2y_2$).

Poziția centrului de greutate G al suprafeței se calculează față de sistemul de referință z_0Oy_0 cu relațiile 3.2-3:

$$y_G = \frac{10a \cdot 2a \cdot 7a + a \cdot 6a \cdot 3a}{10a \cdot 2a + a \cdot 6a} = 6{,}07a \approx 6{,}1a$$

$$z_G = \frac{10a \cdot 2a \cdot 5a + a \cdot 6a \cdot 7{,}5a}{10a \cdot 2a + a \cdot 6a} = 5{,}57a$$

Prin centrul de greutate s-au dus direcțiile centrale Gz şi Gy.

Momentele de inerție axiale față de axele centrale se calculează cu relațiile 3.7.1-1, 3.7.1-2 ținând seama şi de relațiile 3.6.1-2, unde:

$c_1 = 7a – y_G = 7\ a – 6{,}1\ a = 0{,}9\ a$
$c_2 = - (y_G – 3a) = - (6{,}1\ a – 3\ a) = - 3{,}1\ a$
$d_1 = - (z_G – 5a) = - (5{,}57\ a – 5\ a) = - 0{,}57\ a$
$d_2 = 7{,}5a - z_G = 7{,}5\ a – 5{,}57\ a) = 1{,}93\ a$

$$I_z = I_{z_1} + c_1^2 \cdot A_1 + I_{z_2} + c_2^2 \cdot A_2 =$$
$$= \frac{10a \cdot (2a)^3}{12} + (0{,}9a)^2 \cdot 20a^2 + \frac{a \cdot (6a)^3}{12} + (-3{,}1a)^2 \cdot 6a^2 = 98{,}49a^4$$

$$I_y = I_{y_1} + d_1^2 \cdot A_1 + I_{y_2} + d_2^2 \cdot A_2 =$$
$$= \frac{(10a)^3 \cdot 2a}{12} + (-0{,}57a)^2 \cdot 20a^2 + \frac{(a)^3 \cdot 6a}{12} + (1{,}93a)^2 \cdot 6a^2 = 196{,}03\ a^4$$

Momentul de inerție centrifugal față de direcțiile centrale, se calculează cu relația 3.7.2-1:

$$I_{zy} = I_{z_1y_1} + c_1 \cdot d_1 \cdot A_1 + I_{z_2y_2} + c_2 \cdot d_2 \cdot A_2 =$$
$$= 0 + (0{,}9a) \cdot (-0{,}57a) \cdot 20a^2 + 0 + (-3{,}1a) \cdot (1{,}93a) \cdot 6a^2 = -46{,}15\ a^4$$

Poziția uneia dintre direcțiile principale de inerție se determină cu relația 3.8-9:

$$\alpha_1 = \frac{1}{2} \cdot \mathrm{arctg}\left(-\frac{2 \cdot I_{zy}}{I_z - I_y}\right) =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \mathrm{arctg}\left[-\frac{2 \cdot (-46{,}15a^4)}{98{,}49a^4 - 196{,}03a^4}\right] = -21{,}7^0$$

Pentru a se ajunge la direcțiile principale de inerție, direcțiile centrale Gz şi Gy trebuie rotite în sens orar (de la z spre y pe drumul cel mai lung). În Fig.3.9-1, sunt poziționate direcțiile principale 1 şi 2. Deoarece $I_{zy} < 0$, direcția care trece prin primul cadran (cel format de Gz şi Gy), este direcția principală de inerție **1**. Direcția principală de inerție **2**, este perpendiculară pe prima.

Momentele de inerție principale se calculează cu relația 3.8-12:

$$I_{1,2} = \frac{I_z + I_y}{2} \pm \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(I_z - I_y)^2 + 4 \cdot I_{zy}^2} =$$
$$= \frac{98{,}49a^4 + 196{,}03a^4}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(98{,}49a^4 - 190{,}03a^4)^2 + 4 \cdot (-46{,}15a^4)^2}$$

de unde se obțin valorile pentru momentele de inerție principale:

$I_1 = 214{,}4\ a^4$ şi $I_2 = 80{,}115\ a^4$

Modulele de rezistență față de axele centrale Gz şi Gy se calculează cu relațiile 3.5-1:

$$W_{z,min} = \frac{I_z}{y_{max}} = \frac{I_z}{y_G} = \frac{98{,}49a^4}{6{,}1a} = 16{,}14\,a^3$$

$$W_{z,max} = \frac{I_z}{y_{min}} = \frac{I_z}{8a - y_G} = \frac{98{,}49a^4}{8a - 6{,}1a} = 51{,}83\ a^3$$

$$W_{y,min} = \frac{I_y}{z_{max}} = \frac{I_y}{z_G} = \frac{196{,}03a^4}{5{,}57a} = 35{,}19\ a^3$$

$$W_{y,max} = \frac{I_y}{z_{min}} = \frac{I_y}{10a - z_G} = \frac{196{,}03a^4}{10a - 5{,}57a} = 44{,}25\ a^3$$

Exemplul nr.2. *Pentru suprafața plană din Fig.3.9-2, să se calculeze momentele de inerție principale şi modulul de rezistență minim față de direcția centrală Gz.*

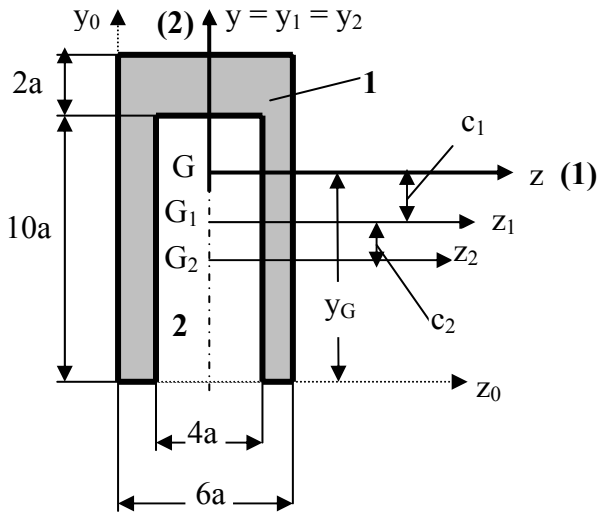


Fig.3.9-2

Suprafața s-a descompus în două suprafețe: una *plină* de dimensiuni 12a · 6a şi una *gol* de dimensiuni 10a · 4a. În Fig.3.9-2 s-au poziționat centrele de greutate G_1, G_2 ale suprafețelor componente şi s-au reprezentat şi sistemele de axe centrale corespunzătoare, $z_1G_1y_1$ şi $z_2G_2y_2$.

Deoarece suprafața prezintă o axă de simetrie, este suficientă o singură coordonată a poziției centrului de greutate G:

$$y_G = \frac{12a \cdot 6a \cdot 6a - 10a \cdot 4a \cdot 5a}{12a \cdot 6a - 10a \cdot 4a} = 7{,}25a$$

Distanțele dintre axe sunt:

$c_1 = -(y_G - 6a) = -(7{,}25a - 6a) = -1{,}25a$
$c_2 = -(y_G - 5a) = -(7{,}25a - 5a) = -2{,}25a$
$d_1 = d_2 = 0$

Momentele de inerție axiale față de axele centrale sunt:

$$I_z = I_{z_1} + c_1^2 \times A_1 - I_{z_2} + c_2^2 \times (-A_2) =$$
$$= \frac{6a \times (12a)^3}{12} + (-1{,}25a)^2 \times 72a^2 - \frac{4a \times (10a)^3}{12} + (2{,}25a)^2 \times (-40a)^2 = 440{,}66\ a^4$$

$$I_y = I_{y_1} + d_1^2 \cdot A_1 - I_{y_2} + d_2^2 \cdot (-A_2) =$$
$$= \frac{(6a)^3 \cdot 12a}{12} + 0 - \frac{(4a)^3 \cdot 10a}{12} + 0 = 162{,}66\ a^4$$

Momentul de inerție centrifugal I_{zy} este nul, deoarece suprafața are o axă de simetrie. Şi prin calcul se ajunge la acelaşi rezultat. Ca urmare, axele centrale Gz şi Gy sunt şi axe de inerție principale, iar momentele de inerție centrale I_z şi I_y sunt şi momente de inerție principale.

Deoarece $I_z > I_y$, rezultă că direcția principală **1** este axa centrală Gz, iar direcția principală **2** este axa centrală Gy (Fig.3.9-2).

Modulul de rezistență minim față de axa centrală Gz este:

$$W_{z,min} = \frac{I_z}{y_{max}} = \frac{I_z}{y_G} = \frac{440{,}66 \cdot a^4}{7{,}25\ a} = 60{,}78\ a^3$$

4. CARACTERISTICI MECANICE ALE METALELOR. ÎNCERCAREA LA TRACȚIUNE ŞI COMPRESIUNE A OȚELULUI

Alegerea materialului pentru confecționarea unei anumite piese se face şi pe baza aşa numitelor *caracteristici mecanice* pe care le prezintă materialul. Cunoaşterea acestor caracteristici mecanice are loc numai pe baza unor *încercări mecanice*, care să scoată în evidență comportarea materialului în condiții de solicitare.

Cea mai utilizată încercare în urma căreia se pun în evidență caracteristicile mecanice ale unui material, este *încercarea la tracțiune*.

4.1 ÎNCERCAREA LA TRACȚIUNE A OȚELULUI DE UZ GENERAL

Încercarea la tracțiune a oțelului, ca şi de altfel toate încercările de materiale, este standardizată.

În cele ce urmează, se va prezenta numai acea parte care interesează strict caracteristicile mecanice ale oțelului.

Epruveta, de *diametru inițial* d_0, pentru încercarea la tracțiune are o porțiune de lungime L_0, numită *baza de măsurare*, pe care se măsoară lungirea acesteia sub acțiunea solicitării.

În funcție de raportul dintre baza de măsurare L_0 şi diametrul inițial d_0, epruvetele utilizate pentru încercări sunt:

- *epruvete normale* (scurte) când $L_0 / d_0 = 5$
- *epruvete lungi* când $L_0 / d_0 = 10$.

În timpul încercării la diferite valori ale forței F se măsoară lungirea bazei de măsurare:

$$\Delta L = \delta = L - L_0 \qquad 4.1\text{-}1$$

unde

L – dimensiunea bazei de măsurare la un moment dat.

Curba *forță-lungire* (F - δ) înregistrată în urma încercării, reprezintă *curba caracteristică la tracțiune*.

La încercarea la tracțiune a oțelului de uz general, diagrama caracteristică care se obține are forma din Fig.4.1-1.

Curba caracteristică la tracțiune depinde de lungimea bazei de măsurare. Pentru înlăturarea acestui neajuns, curba caracteristică se reprezintă în coordonate σ şi ε, definite astfel:

$$\sigma = \frac{F}{A_0} \quad ; \quad \varepsilon = \frac{\delta}{L_0} \qquad 4.1\text{-}2$$

unde

A_0 – aria inițială a secțiunii transversale a epruvetei (înainte de solicitare) în zona bazei de măsurare,

$A_0 = \pi\,(d_0)^2 / 4$.

Deoarece mărimile în care se reprezintă curba caracteristică la tracțiune sunt raportate la aria inițială a secțiunii transversale (mărimi specifice), curba poartă numele de *curbă caracteristică convențională la tracțiune.*

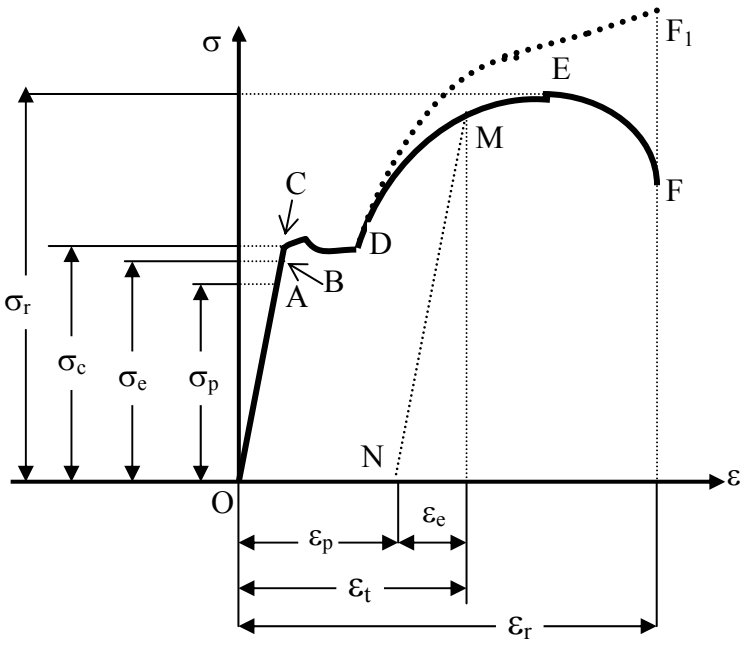


Fig.4.1-1 Diagrama caracteristică convențională la tracțiune a oțelului de uz general

Pe curba caracteristică convențională la tracțiune (Fig.4.1-1) se pot stabili o serie de puncte, cărora le corespund mai multe mărimi importante:

- Ordonata punctului A, până unde curba caracteristică convențională este linie dreaptă, se numeşte *limită de proporționalitate a materialului,* σ_p *(*σ_l). Porțiunea OA este *zona de proporționalitate* a curbei caracteristice. În acest domeniu, este valabilă legea lui Hooke, care exprimă o proporționalitate între tensiune şi deformație specifică:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \qquad 4.1\text{-}3$$

unde

$E = \sigma / \varepsilon$ şi reprezintă panta porțiunii liniare a curbei caracteristice. Caracteristica de material E se numeşte *modul de elasticitate longitudinal.*

- Ordonata punctului B, până unde materialul se comportă perfect elastic, adică după descărcare îşi recapătă dimensiunea inițială L_0, se numeşte *limită de elasticitate,* σ_e (R_p). În realitate nici un material nu are comportare perfect elastică, sub acțiunea solicitărilor el capătă *deformații permanente* (remanente, plastice).
- După punctul B urmează o porțiune BCD în care cu toate că încărcarea continuă, forța nu mai creşte, având mici oscilații în jurul unei valori. Se spune că în această porțiune materialul *curge,* iar intervalul BCD este un *palier de curgere.* Tensiunea corespunzătoare palierului de curgere se numeşte *limită de curgere aparentă* σ_c (R_p).

Limita de curgere aparentă se calculează cu relația:

$$\sigma_c = \frac{F_c}{A_0} \qquad 4.1\text{-}4$$

unde

F_c – reprezintă valoarea forței înregistrată în momentul curgerii materialului

- După punctul D, curba caracteristică are un traseu ascendent până în punctul E. Porțiunea DE este numită *zonă de întărire* (ecruisare). În zona de ecruisare unde se produc deformații plastice semnificative, legea lui Hooke nu se mai respectă. La descărcare, relația dintre tensiunea σ şi deformația specifică ε este liniară, paralelă cu porțiunea liniară a curbei caracteristice (dreapta MN),

Deformația totală (ε_t) are două componente: una *elastică* (ε_e) şi una *plastică* (ε_p). Ordonata punctului E, reprezintă *rezistența de rupere* σ_r *(R_m)* a materialului, care se poate calcula cu relația:

$$\sigma_r = R_m = \frac{F_{max}}{A_0} \qquad 4.1\text{-}5$$

unde

F_{max} – valoarea maximă a forței înregistrată în timpul încercării.

- La atingerea valorii F_{max} (punctul E), într-un anumit loc al epruvetei secțiunea începe să se micşoreze (se produce *gâtuirea)*, continuând până se produce ruperea (punctul F).

Dacă după ruperea epruvetei, cele două părți rezultate se aşează cap la cap, şi se măsoară dimensiunea bazei de măsurare L_u (lungimea ultimă), se determină *alungirea la rupere* sau *lungirea specifică la rupere* ε_r:

$$\varepsilon_r = \frac{L_u - L_0}{L_0} = \frac{\Delta L}{L_0} = \frac{\delta}{L_0} \qquad 4.1\text{-}6$$

De obicei alungirea se exprimă în procente şi se notează cu A_n unde n reprezintă numărul dat de raportul L_0 / d_0 (la epruvete normale n = 5 iar la cele lungi, n = 10):

$$A_n = \frac{L_u - L_0}{L_0} \cdot 100 \quad [\%] \qquad 4.1\text{-}7$$

Altă mărime care se determină la încercarea la tracțiune este *gâtuirea la rupere* (exprimată de obicei în procente) şi definită de relația:

$$Z = \frac{A_0 - A_u}{A_0} \cdot 100 \quad [\%] \qquad 4.1\text{-}8$$

Mărimile determinate: *limita de proporționalitate, modulul de elasticitate longitudinal, limita de elasticitate, limita de curgere aparentă, rezistența de rupere, alungirea la rupere şi gâtuirea la rupere*, sunt cunoscute ca fiind *caracteristici mecanice ale materialului.*

Din curba caracteristică convențională rezultă că ruperea (punctul F din Fig.4.1-1) se produce la o tensiune mai mică decât cea corespunzătoare punctului E. Dacă însă forța din timpul încercării s-ar raporta la aria secțiunii din momentul înregistrării forței (care este mai mică decât cea inițială A_0), s-ar obține aşa numita *curbă caracteristică reală a materialului* (traseul OABCDF_1 din Fig.4.1-1). La curba caracteristică reală, ruperea se produce în punctul F_1, la o încărcare mai mare decât cea corespunzătoare punctului E. Înseamnă că rezistența reală la rupere este mai mare decât rezistența la rupere dată de punctul E din diagrama caracteristică convențională. Dificultatea obținerii *diagramei caracteristice reale* față de cea a *diagramei caracteristice convenționale* şi considerarea unei rezistențe la rupere mai mică decât a celei reale, face în practică utilizarea pe scară mare a diagramei caracteristice convenționale.

Caracteristicile mecanice determinate pe baza curbei caracteristice convenționale sunt şi ele *caracteristici mecanice convenționale*.

Caracteristicile mecanice convenționale: limita de proporționalitate convențională σ_p, limita de elasticitate convențională σ_e, limita de curgere convențională σ_c şi rezistența de rupere σ_r, constituie tensiuni limită pentru un material. Pe baza acestor caracteristici de material se alege valoarea tensiunii admisibile σ_a (vezi paragraful 1.9) pentru calculele de rezistență. Cea mai

utilizată stare limită pentru stabilirea tensiunii admisibile σ_a este limita de curgere convențională σ_c:

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{lim}}{c} = \frac{\sigma_c}{c} \qquad \text{sau} \qquad \sigma_a = \frac{\sigma_r}{c} \qquad 4.1\text{-}9$$

Caracteristicile mecanice ale materialului sunt influențate de o serie de factori: temperatura, viteza de solicitare, factorii tehnologici, etc.

4.2 ÎNCERCAREA LA COMPRESIUNE A OȚELULUI

Încercarea la compresiune a oțelului decurge asemănător cu încercarea la tracțiune, solicitarea de tracțiune fiind înlocuită cu una de compresiune. Încercarea la compresiune a oțelului este de asemenea standardizată.

Pentru încercarea la compresiune a oțelului se utilizează epruvete de obicei cilindrice, având diametrul egal cu lungimea (înălțimea):

$$d = h = L_0 = 10 \ldots 30 \text{ mm.}$$

Diagrama caracteristică convențională la compresiune este la fel ca pentru solicitarea de tracțiune (Fig.4.2-1), cu deosebirea că pe abscisă nu mai este alungirea ε ci *scurtarea specifică* A_c:

$$A_c = \frac{L_0 - L_u}{L_0} \qquad 4.2\text{-}1$$

De asemenea, epruveta nu mai suferă o gâtuire, ci o *umflare la rupere*:

$$Z_c = \frac{A_u - A_0}{A_0} \qquad 4.2\text{-}2$$

Încercarea la compresiune arată că oțelul prezintă aceleaşi valori pentru σ_p, σ_e, σ_c şi E ca la cea de tracțiune. La oțelurile care au valori scăzute pentru caracteristicile mecanice, ruperea la solicitarea de compresiune nu se produce, ele se turtesc mereu. La aceste oțeluri, se prevede limita până la care se continuă încercarea.

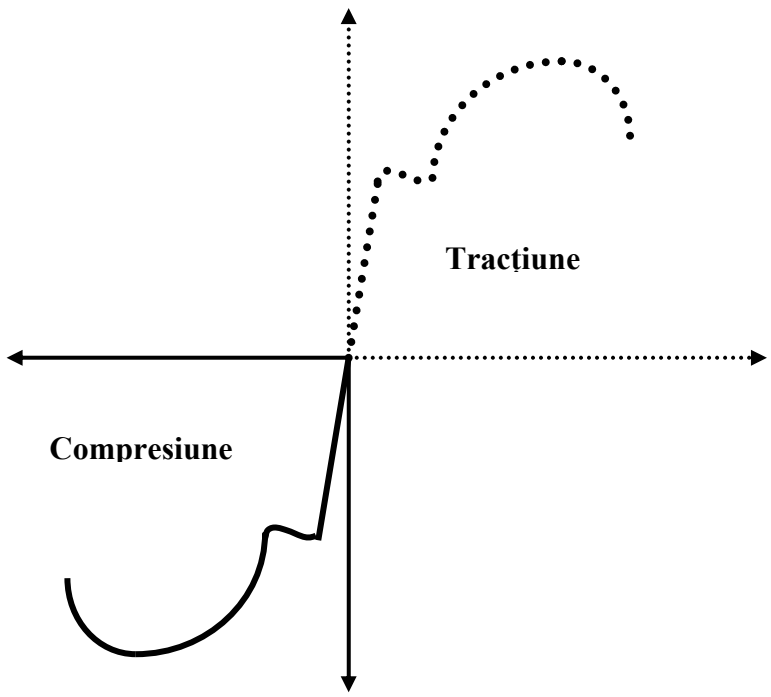


Fig.4.2-1

4.3 ÎNCERCAREA LA TRACȚIUNE A OȚELULUI ALIAT

La oțelurile aliate pe diagrama caracteristică, momentul curgerii materialului nu se mai evidențiază. Pentru aceste oțeluri, poziționarea punctelor care definesc limita de proporționalitate şi cea de elasticitate, este foarte greu de stabilit. Din acest motiv, caracteristicile mecanice la materialele cu o astfel de diagramă caracteristică la tracțiune (Fig.4.3-1), se definesc convențional.

Limita de proporționalitate convențională σ_p (sau σ_{l10}), *este tensiunea corespunzătoare punctului de pe diagrama caracteristică pentru care modulul de elasticitate longitudinal tangent curent* E_σ (în punctul respectiv) *are o abatere față de modulul de elasticitate inițial* E_0 (determinat pe porțiunea liniară a curbei caracteristice). Pentru oțeluri această abatere este de 10 %.

Limita de elasticitate convențională $\sigma_{0,01}$ (sau $\sigma_{p0,01}$) *este tensiunea corespunzătoare punctului de pe diagrama caracteristică la tracțiune pentru care la descărcare se obține o deformație specifică remanentă* (plastică) *de o anumită valoare.* Pentru oțeluri această valoare este de 0,01 %.

Limita de curgere convențională $\sigma_{0,2}$ (sau $R_{p0,2}$), *este tensiunea corespunzătoare punctului de pe diagrama caracteristică la tracțiune, pentru*

care la descărcare se obține o deformație specifică remanentă de o anumită valoare. Pentru oțeluri această valoare este de 0,2%.

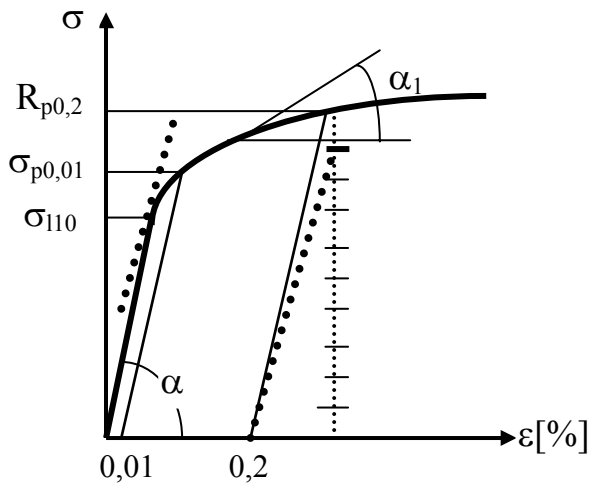


Fig.4.3-1 Diagrama caracteristică a oțelului aliat

La materialele care prezintă o astfel de diagramă caracteristică la tracțiune, se definesc două module de elasticitate: unul *inițial* sau în origine E_0, definit pe porțiunea liniară a curbei caracteristice:

$$E_0 = \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sigma}{\varepsilon} \qquad 4.3\text{-}1$$

şi unul *tangent curent* E_σ, definit pe porțiunea neliniară a curbei şi care este tangenta unghiului α_1 făcut de abscisa ε cu tangenta la curbă în punctul considerat.

$$E_\sigma = \mathrm{tg}\,\alpha_1 \qquad 4.3\text{-}2$$

Modulul de elasticitate tangent curent, se modifică de la un punct la altul al porțiunii neliniare a curbei caracteristice.

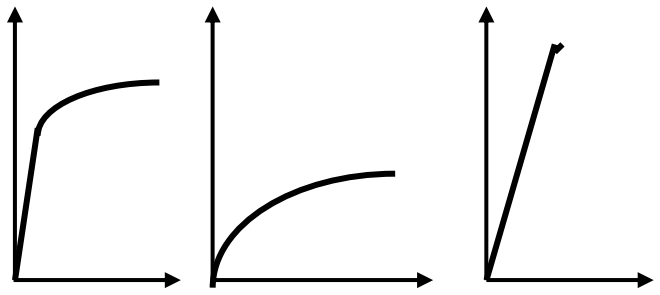
Determinarea caracteristicilor mecanice convenționale pentru oțelul aliat din diagrama caracteristică la tracțiune, este prezentată în Fig.4.3-1.

4.4 CLASIFICAREA MATERIALELOR ÎN FUNCȚIE DE CARACTERISTICILE MECANICE

La alegerea unui material pentru realizarea pieselor stă aşa numita *tenacitate a materialului.* Tenacitatea trebuie să fie atunci o însuşire mai complexă a unui material, care să țină seama de mai multe caracteristici mecanice ale acestuia. În literatura de specialitate, de multe ori se face confuzie între tenacitatea materialului şi altă caracteristică, spre exemplu ductibilitatea materialului.

Pe baza deformațiilor pe care le suferă un material până la rupere, materialele pot fi:

- Dacă deformația plastică Δ_p până la rupere este mult mai mare decât zero ($\Delta_p >> 0$), atunci materialul este *deformabil* sau *ductil.* Aceste materiale prezintă diagrame caracteristice ca cele din Fig.4.4-1a,b.
- Dacă deformația plastică până la rupere este zero sau apropiată de zero ($\Delta_p = 0$), materialul este *fragil* sau *casant*. Aceste materiale prezintă o curbă caracteristică ca cea din Fig.4.4-1c.
- *Materialele deformabile* sau *ductile* pot fi la rândul lor: *tenace* cu diagrama caracteristică la tracțiune ca cea din Fig.4.4-1a, sau *maleabile,* care au o diagramă caracteristică la tracțiune ca cea din Fig.4.4-1b.



a) **b)** **c)**

Fig.4.4-1 Forme ale diagramelor caracteristice la tracțiune

Materialele maleabile sunt materialele care până la rupere au deformații plastice mari, dar nivelul tensiunii este scăzut. Aceste materiale, în timpul deformării plastice, nu prezintă fenomenul de ecruisare.

Materialele tenace suferă până la rupere deformații plastice mari, dar şi nivelul tensiunii este ridicat. La aceste materiale este prezent fenomenul de ecruisare.

În Fig.4.4-2, se prezintă schematic o clasificare a materialelor, după mărimea deformației plastice suferită până la rupere.

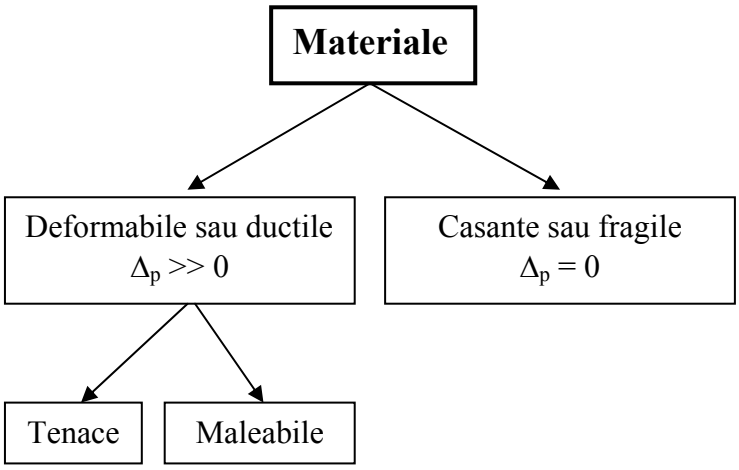


Fig.4.4-2 Clasificarea materialelor după deformația plastică suferită până la rupere

Pe baza celor afirmate până acum, se poate configura următoarea *definire a tenacității* unui material: *tenacitatea este însuşirea unui material de a suferi până la rupere, sub acțiunea unui nivel de solicitare ridicat, deformații plastice mari.*

În funcție de prezența sau absența deformațiilor plastice până la rupere, ruperea materialelor poate fi: *ductilă* sau *fragilă.* Cele două moduri de rupere, dau suprafețelor de separație (rupere), aspecte diferite. Ruperea ductilă conferă un aspect mat, "fibros", iar ruperea fragilă (*separare* sau *clivaj*), conferă suprafeței de rupere un aspect lucios, "cristalin".

Ruperea ductilă, fiind precedată de deformații plastice mari, are o energie de rupere apreciabilă, pe când la ruperea fragilă, această energie este mică. La ruperea ductilă, ruperea se localizează într-o anumită zonă, unde se produce o gâtuire. În această zonă, separarea se face pe fețe înclinate la 45^0 față de direcția de solicitare. Separarea pe fețele înclinate are loc în urma unui proces de deformare plastică. Microfractografic, ruperea ductilă se recunoaşte prin prezența pe suprafața de rupere a unor cavități semisferice, numite "cupe", care sunt micropori formați în procesul ruperii ductile. În cazul inițierii microfisurilor, la ruperea ductilă un rol important îl au incluziunile. În mod obişnuit, ruperea ductilă se produce transgranular.

În cazul ruperilor fragile, suprafața de separație este perpendiculară pe direcția de solicitare. Ruperea fragilă se dezvoltă intergranular, sau chiar în interiorului unui grăunte, pe mai multe nivele care dau naştere unei imagini de "râuri". Într-un grăunte, râurile converg spre punctul de inițiere al ruperii.

Oțelul de uz general, prezintă o *rupere mixtă*. Mai întâi se localizează o rupere ductilă care se continuă cu una de clivaj.

Materialele se mai pot clasifica şi după alte criterii. Spre exemplu, *după valoarea constantelor elastice* (E, G, ν) determinate pe diferite direcții, materialele pot fi:

- *izotrope,* atunci când valorile constantelor elastice rămân constante în toate direcțiile,
- *anizotrope*, când valorile constantelor elastice au valori diferite după direcții diferite. Aceste materiale, sunt materiale care prezintă stratificații, fibre, etc.

Dacă materialul are totuşi trei plane de simetrie cu privire la caracteristicile sale elastice, atunci el este *ortotrop.* Lemnul este un material anizotrop. Modulul de elasticitate longitudinal pentru lemn la tracțiune în lungul fibrelor este mult mai mare decât cel perpendicular pe fibre.

În ultimele decenii, pe plan mondial, au început să se efectueze cercetări asupra elementelor de rezistență care prezintă diferite defecte, în special fisuri. În aceste condiții, în literatura de specialitate, a apărut o nouă noțiune: *tenacitatea la rupere. Tenacitatea la rupere, este acea proprietate a unui material de a se opune inițierii sau propagării (dezvoltării) fisurilor.* Trebuie făcută o netă diferențiere între *tenacitatea* unui material şi *tenacitatea la rupere* a acestuia.

Tenacitatea la rupere se exprimă prin una din caracteristicile de tenacitate definite de o nouă disciplină, ***Mecanica Ruperii***, caracteristici care se determină pe cale experimentală, după tehnici bine precizate, standardizate.

Cele două noțiuni, aparent asemănătoare, au totuşi domenii de aplicabilitate complet diferite şi ele nu trebuie confundate.

5. TRACȚIUNEA ŞI COMPRESIUNEA BARELOR DREPTE. APLICAȚII

Dacă în secțiunea transversală a unui element de rezistență există un singur efort şi acesta este efortul axial N, se spune că în secțiunea respectivă se realizează o *solicitare axială*. Dacă efortul axial este pozitiv, solicitarea axială este de *tracțiune (întindere)*, iar dacă efortul axial este negativ, solicitarea este de *compresiune.*

5.1 TENSIUNI ŞI DEFORMAȚII LA SOLICITAREA AXIALĂ

Se consideră o bară dreaptă, de secțiune dreptunghiulară, solicitată de două forțe egale şi de sens contrar, forțe ce acționează în centrul de greutate al secțiunii transversale al barei (Fig.5.1-1a).

Într-o secțiune oarecare x, singurul efort este efortul axial N (Fig.5.1-1b):

$$\left(\sum F\right)_x = 0 \quad \Rightarrow \quad N = F \qquad 5.1\text{-}1$$

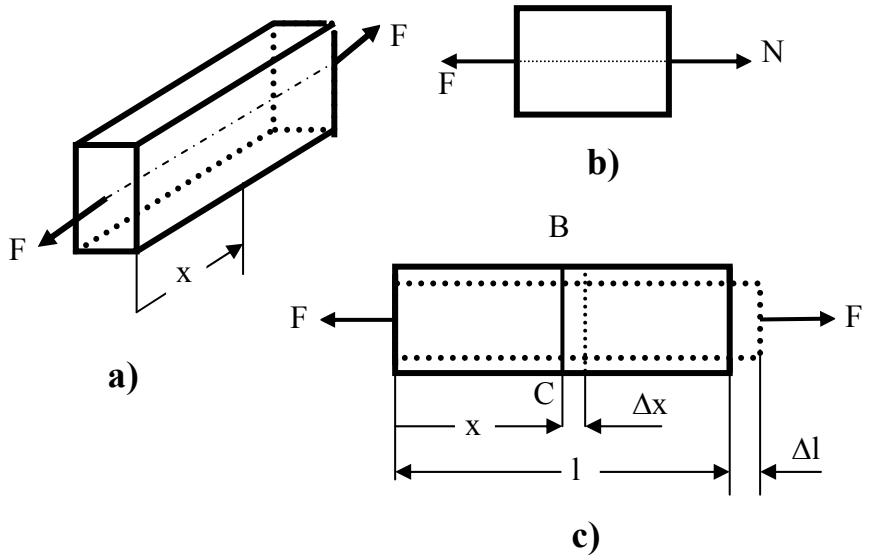


Fig.5.1-1

Bara are secțiune constantă, de arie A.

Prin aplicarea unei forțe axiale F, bara se deformează. O secțiune oarecare BC (Fig.5.1-1c) se deplasează, dar rămâne plană şi perpendiculară pe axa longitudinală şi după deformarea barei. Înseamnă că la solicitarea axială, ipoteza lui Bernoulli este satisfăcută. Ca urmare, toate punctele secțiunii transversale se deplasează în lungul axei barei, cu aceeaşi cantitate Δx, iar alungirea ε are aceeaşi valoare pentru fiecare punct al secțiunii (ε = const.). Alungirii constante ε, în domeniul valabilității legii lui Hooke, îi corespund tensiuni normale constante (Fig.5.1-2):

$$\sigma = E \cdot \varepsilon = \text{const.} \qquad 5.1\text{-}2$$

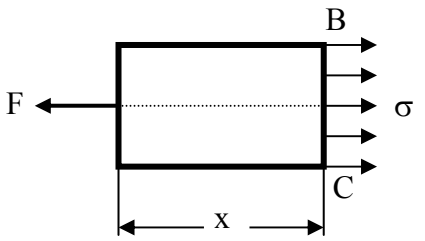


Fig.5.1-2

Dintre cele şase ecuații de echivalență dintre eforturi şi tensiuni (vezi paragraful 2.2), pentru secțiunea BC (Fig.5.1-2) se poate scrie una singură:

$$N = \int_A \sigma \cdot dA = \sigma \cdot \int_A dA = \sigma \cdot A \qquad 5.1\text{-}3$$

de unde, se determină valoarea tensiunii dintr-o secțiune transversală solicitată de efortul axial N:

$$\sigma = \frac{N}{A} \qquad 5.1\text{-}4$$

În domeniul valabilității legii lui Hooke, alungirea ε are expresia:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{N}{A \cdot E} \qquad 5.1\text{-}5$$

de unde apoi se determină *lungirea totală* a barei de lungime l:

$$\Delta l = \varepsilon \cdot l = \frac{N \cdot l}{E \cdot A} \qquad 5.1\text{-}6$$

Din relația 5.1-6, rezultă că lungirea totală a barei este cu atât mai mare cu cât produsul dintre aria secțiunii A şi modulul de elasticitate longitudinal E, este mai mic. Produsul EA se numeşte *modul de rigiditate la întindere sau compresiune* al secțiunii, sau simplu, *rigiditatea barei* la solicitarea axială.

Pentru solicitarea axială de tracțiune deformația totală se numeşte *lungire,* iar pentru cea de compresiune, *scurtare.*

Un element de rezistență solicitat axial, se poate calcula din *condiția de rezistență* (se impune σ_a) sau din *condiția de rigiditate* (când se impune ε_a sau Δl_a).

Pentru cele trei tipuri de problemă specifice Rezistenței Materialelor, relațiile de calcul pentru condiția de rezistență şi rigiditate, sunt:

- ***Probleme de verificare***, când se calculează valorile maxime ale tensiunii normale sau ale alungirii
  - *condiția de rezistență*

$$\sigma_{max} = \frac{N}{A} \le \sigma_a \qquad 5.1\text{-}7$$

  - *condiția de rigiditate*

$$\varepsilon_{max} = \frac{N}{E \cdot A} \le \varepsilon_a \qquad 5.1\text{-}8$$

- ***Probleme de dimensionare,*** când se calculează aria secțiunii şi de aici mai departe în funcție de forma acesteia, dimensiunea secțiunii transversale
  - *condiția de rezistență*

$$A_{nec} = \frac{N}{\sigma_a}$$

5.1-9

  - *condiția de rigiditate*

$$A_{nec} = \frac{N}{E \cdot \varepsilon_a} \qquad 5.1\text{-}10$$

❖ ***Probleme de efort capabil*** (încărcare capabilă), când se calculează mărimea maximă admisă a efortului axial din secțiune şi de aici mai departe, forțele exterioare care solicită elementul de rezistență

➢ *condiția de rezistență*

$$N_{cap} = A \cdot \sigma_a \qquad 5.1\text{-}11$$

➢ *condiția de rigiditate*

$$N_{cap} = E \cdot A \cdot \varepsilon_a \qquad 5.1\text{-}12$$

Calculele de rezistență se fac pentru secțiunea în care tensiunile sau deformațiile specifice ating valorile cele mai mari. Această secțiune poartă numele de *secțiune periculoasă.* Cunoaşterea secțiunii periculoase sau a unor secțiuni posibil a fi periculoase, este absolut necesară în calcul de rezistență.

Aplicații

Exemplul nr. 1. *Să se dimensioneze cablul unui troliu, care trebuie să ridice o sarcină de 30 KN, dacă se cunosc*: $\sigma_a = 120$ *MPa*, $\varepsilon_a = 0{,}05$ *%*, $E = 2 \cdot 10^5$ *MPa*.

Dimensionarea trebuie făcută atât din condiția de rezistență cât şi din cea de rigiditate. Efortul axial din cablu care este de secțiune circulară cu diametrul *d*, este egal cu sarcina care trebuie ridicată, N = F.

Pentru condiția de rezistență, se obține:

$$A_{nec} = \frac{N}{\sigma_a} = \frac{\pi \cdot d_1^2}{4}$$

de unde rezultă diametrul necesar:

$$d_1 = \sqrt{\frac{4 \cdot N}{\pi \cdot \sigma_a}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 30 \cdot 10^3}{\pi \cdot 120}} = 17{,}8 \text{ mm} \approx 18\text{mm}$$

Pentru condiția de rigiditate, se obține

$$A_{nec} = \frac{N}{E \cdot \varepsilon_a} = \frac{\pi \cdot d_2^2}{4}$$

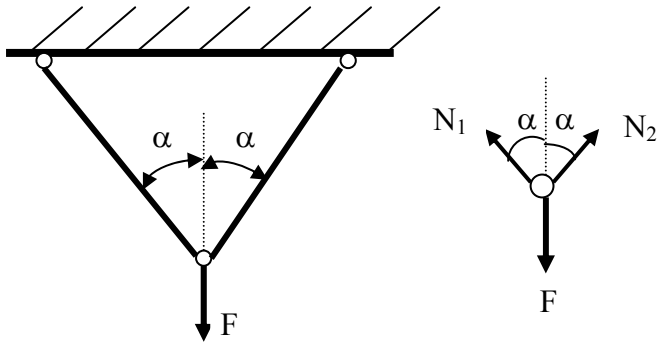
de unde rezultă diametrul necesar

$$d_2 = \sqrt{\frac{4 \cdot N}{\pi \cdot E \cdot \varepsilon_a}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 30 \cdot 10^3}{\pi \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 0{,}05 \cdot 10^{-2}}} = 19{,}54 \text{ mm} \approx 20 \text{ mm}$$

Au rezultat două valori, din condiții diferite, pentru aceeaşi mărime (diametrul cablului, *d*). Pentru ca ambele condiții să fie îndeplinite în acelaşi timp, se va lua dimensiunea cea mai mare obținută:

$$d_{final} = d_{max} = d_2 = 20 \text{ mm}.$$

Exemplul nr. 2. *Ce greutate poate fi susținută de tijele se secțiune circulară cu diametrul d = 20 mm şi lungime l = 3 m* (Fig.5.1-3a), *dacă* $\sigma_a = 150$ *MPa*, $\alpha = 45^0$? *Să se calculeze şi deplasarea pe verticală a articulației comune (E =* $2 \cdot 10^5$ *MPa).*



a) **b)**

Fig.5.1-3

Calculul efortului capabil se face numai din condiția de rezistență. Mai întâi, trebuie determinate eforturile axiale din cele două tije. Eforturile axiale din tije sunt evidențiate în Fig.5.1-3b.

Punând condițiile de echilibru ca proiecții de forțe pe orizontală şi verticală pentru schema din Fig.5.1-3, se obține:

$$\left(\sum F\right)_x = 0 \quad \Rightarrow \quad N_1 \cdot \sin\alpha - N_2 \cdot \sin\alpha = 0$$

$$\Rightarrow \quad N_1 = N_2$$

$$\left(\sum F\right)_y = 0 \quad \Rightarrow \quad N_1 \cdot \cos\alpha + N_2 \cdot \cos\alpha - F = 0$$

$$\Rightarrow \quad 2 \cdot N_1 \cdot \cos\alpha = F$$

Din cele două relații de echilibru, rezultă valoarea eforturilor:

$$N_1 = N_2 = \frac{F}{2 \cdot \cos\alpha} = \frac{F}{2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{F}{\sqrt{2}}$$

Eforturile axiale din tije sunt egale. Egale sunt şi ariile secțiunii transversale a tijelor. Cum tijele au secțiune constantă şi eforturile sunt de asemenea constante, rezultă că toate secțiunile sunt la fel de periculoase. Calculul de rezistență se va face atunci numai pentru o singură tijă.

Cunoscând valoarea eforturilor din tije, se poate trece la calculul efortului capabil şi apoi la determinarea forței maxime care poate solicita cele două tije:

$$N_{cap} = A \cdot \sigma_a = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot \sigma_a = \frac{F}{\sqrt{2}}$$

de unde,

$$F = \frac{\sqrt{2} \cdot \pi \cdot \sigma_a \cdot d^2}{4} = \frac{\sqrt{2} \cdot \pi \cdot 150 \cdot 20^2}{4} = 66643{,}2 \ \text{N} \approx 66{,}64 \ \text{KN}$$

Calculul deplasării pe verticală a articulației comune se face pe baza schemei din Fig.5.1-4.

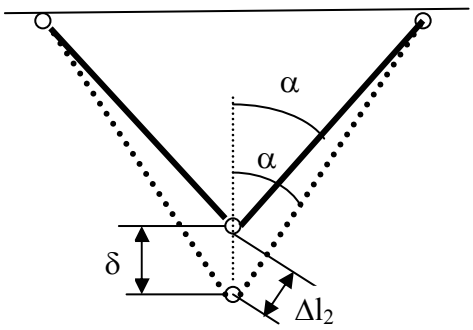


Fig.5.1-4

Din Fig.5.1-4, rezultă că deplasarea pe verticală a articulației comune, este:

$$\delta = \frac{\Delta l_2}{\cos\alpha} = \frac{1}{\cos\alpha} \cdot \frac{N_2 \cdot l}{E \cdot A} = \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{66{,}64 \cdot 10^3 \cdot 3 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 100 \cdot \pi} = 4{,}5 \ \text{mm}$$

5.2 CONCENTRAREA TENSIUNILOR

Materialele ductile se deosebesc de cele fragile şi prin comportarea lor diferită la *tensiuni locale*. *Tensiunile locale sunt acele tensiuni care se extind pe o porțiune relativ redusă a secțiunii transversale a elementului de rezistență.* În general, aceste tensiuni sunt produse de o modificare bruscă a dimensiunilor sau a formei secțiunilor de-a lungul elementului.

Dacă se supune la întindere o bară slăbită cu o gaură (Fig.5.2-1a), în secțiunea slăbită la o distanță suficient de mare de această gaură (secțiunea 2-2), distribuția tensiunii pe secțiune este uniformă (Fig.5.2-1b).

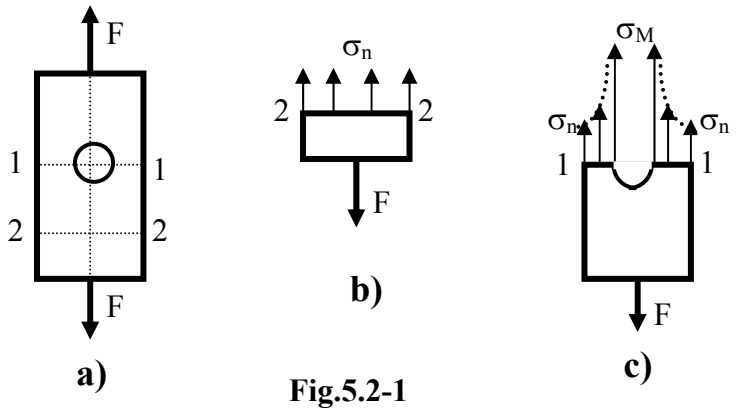


Fig.5.2-1

În secțiunea slăbită (secțiunea 1-1) şi dacă bara are o lățime mare în comparație cu diametrul găurii, distribuția tensiunii normale este ca cea prezentată în Fig.5.2-1c), adică în imediata vecinătate a găurii, tensiunea normală este mult mai mare decât cea calculată cu relația cunoscută ($\sigma_n = N / A$, tensiune normală nominală). Această creştere bruscă a tensiunii normale se extinde numai asupra unei porțiuni foarte reduse a secțiunii din imediata vecinătate a găurii. Pe restul secțiunii, tensiunea normală rămâne aproximativ egală cu σ_n, ca şi cum nu ar exista nici o gaură, nici o slăbire a secțiunii. Astfel de creşteri ale tensiunii normale se produc în cazul tuturor crestăturilor, renuri, canale de pană, găuri pentru bolțuri, filete, zgârieturi, etc. Aceste discontinuități din elementele de rezistență se numesc *concentratori de tensiune.*

Raportul dintre tensiunea locală maximă (σ_M) *şi tensiunea normală nominală* (σ_n), *se numeşte coeficient de concentrare al tensiunii* (α_k):

$$\alpha_k = \frac{\sigma_M}{\sigma_n} \qquad 5.2\text{-}1$$

Cunoscând pentru un concentrator de tensiune valoarea coeficientului de concentrare al tensiunii, se poate calcula valoarea maximă a tensiunii din imediata vecinătate a concentratorului:

$$\sigma_{max} = \sigma_M = \alpha_k \cdot \sigma_n = \alpha_k \cdot \frac{N}{A} \qquad 5.2\text{-}2$$

Dacă secțiunea periculoasă pentru un element de rezistență solicitat axial este într-o porțiune cu concentrator de tensiune, atunci calculul de rezistență trebuie făcut pe baza tensiunii normale maxime, calculate cu relația 5.2-2.

Cercetările experimentale care stau de altfel şi la baza determinării coeficientului de concentrare al tensiunii α_k, arată că α_k depinde numai de elementele geometrice ale concentratorului şi este independent de material.

Fenomenul de concentrare al tensiunii, este specific solicitării în domeniul elastic. La materialele tenace, cum este şi oțelul, după ce se atinge limita de curgere, are loc o uniformizare a tensiunii în secțiunea cu concentrator. Din acest motiv, la materialele tenace, pentru solicitări în regim static, nu este necesar să se ia în calculele de rezistență efectul de concentrare, deoarece (în regim elastic) el produce numai anumite vârfuri de tensiune, fără însă a cauza ruperea. La materialele fragile, fenomenul de concentrare al tensiunii nu mai poate fi neglijat, el manifestându-se până la producerea ruperii.

5.3 BARA DE SECȚIUNE CONSTANTĂ SOLICITATĂ AXIAL, CÂND SE ȚINE SEAMA ŞI DE GREUTATEA PROPRIE

În cele prezentate în paragraful 5.1, în forțele exterioare care solicită bara axial, nu s-a ținut seama de greutatea proprie a acesteia. Nu cumva prin această simplificare a calculului se introduc erori semnificative ?

Se vor determina eforturile şi deformațiile barelor drepte întinse sau comprimate ținând seama de influența greutății proprii a acestora.

Se consideră o bară dreaptă de lungime l, având aria secțiunii transversale A, modulul de elasticitate longitudinal al materialului E, greutatea specifică a materialului γ, supusă acțiunii unei forțe exterioare axiale F (Fig.5.3-1a).

Într-o secțiune oarecare x, măsurată de la capătul liber (Fig.5.3-1a), efortul axial este:

$$N_x = F + G_x = F + A \cdot x \cdot \gamma \cdot g \qquad 5.3\text{-}1$$

iar tensiunea normală din aceeaşi secțiune (Fig.5.3-2c), este:

$$\sigma_x = \frac{N_x}{A} = \frac{F}{A} + \gamma \cdot g \cdot x \qquad 5.3\text{-}2$$

Din relația 5.3-2, rezultă că tensiunea normală variază liniar în lungul barei, între limitele:

$$\sigma_{min} = \sigma_{x,x=0} = \frac{F}{A}$$
$$\sigma_{max} = \sigma_{x,x=l} = \frac{F}{A} + \gamma \cdot g \cdot l \qquad 5.3\text{-}3$$

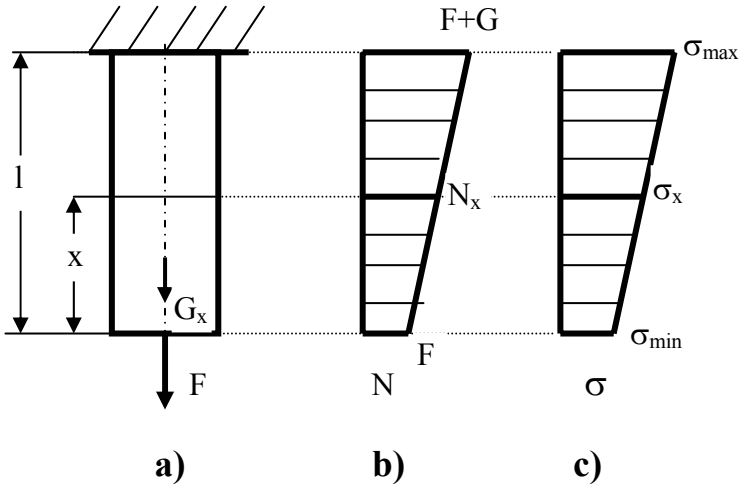


Fig.5.3-1

Se constată că secțiunea periculoasă este în încastrare, unde pentru verificarea condiției de rezistență este necesar ca:

$$\sigma_{max} = \frac{F}{A} + \gamma \cdot g \cdot l \le \sigma_a \qquad 5.3\text{-}4$$

Pentru dimensionare, din relația 5.3-4, se obține:

$$A_{nec} = \frac{F}{\sigma_a - \gamma \cdot g \cdot l} \qquad 5.3\text{-}5$$

Sub acțiunea forței exterioare F şi a greutății proprii, bara se lungeşte. Pentru această situație deformația specifică nu este constantă în lungul barei.

Lungirea totală a barei, se calculează cu relația:

$$\Delta l = \int_0^l \varepsilon_x \cdot dx = \int_0^l \frac{\sigma_x}{E} \cdot dx = \frac{1}{E} \cdot \int_0^l \left(\frac{F}{A} + \gamma \cdot g \cdot x \right) \cdot dx = \frac{1}{E} \cdot \left(\frac{F}{A} \cdot l + \frac{1}{2} \cdot \gamma \cdot g \cdot l^2 \right) =$$

$$= \frac{l}{E}\left(\frac{F}{A} + \frac{1}{2}\cdot\frac{A\cdot\gamma\cdot g\cdot l}{A}\right) = \frac{l}{E\cdot A}\left(F + \frac{A\cdot\gamma\cdot g\cdot l}{2}\right) = \frac{l}{E\cdot A}\left(F + \frac{G}{2}\right)$$

S-a obținut astfel, următoarea relație pentru calculul lungirii barei când se ține seama şi de greutatea proprie a acesteia:

$$\Delta l = \frac{\left(F + \frac{G}{2}\right)\cdot l}{E\cdot A} \qquad 5.3\text{-}6$$

Relația 5.3-6, este asemănătoare cu cea obținută când se neglijează greutatea proprie şi ea arată că în cazul în care greutatea proprie nu se neglijează, la efortul dat de forțele exterioare se adaugă jumătate din greutatea proprie.

Dacă bara nu este supusă forțelor exterioare, atunci numai sub greutatea sa proprie, lungirea ei este:

$$\Delta l = \frac{G\cdot l}{2\cdot E\cdot A} \qquad 5.3\text{-}7$$

Dacă se doreşte, se poate face şi un calcul al deplasării fiecărei secțiuni. Secțiunea situată la distanța x de capătul liber (Fig.5.3-1a), are o deplasare δ_x egală cu lungirea părții de bară de deasupra ei. Aceasta se poate determina scriind lungirea unui interval elementar dx şi integrând de la x la x = l:

$$\delta_x = \int_x^l \varepsilon_x \cdot dx = \frac{1}{E}\cdot\int_x^l\left(\frac{F}{A} + \gamma\cdot x\right)\cdot dx = \frac{1}{E}\cdot\left[\frac{F}{A}\cdot(l - x) + \frac{\gamma}{2}\cdot\left(l^2 - x^2\right)\right] \qquad 5.3\text{-}8$$

Din relația 5.3-8, rezultă că deplasarea axială a secțiunilor variază după o lege parabolică.

Analizând relația 5.3-5, se constată că la o anumită lungime a barei, când numitorul devine egal cu zero, aria secțiunii tinde spre infinit, adică indiferent de mărimea secțiunii, în bară se depăşeşte tensiunea admisibilă numai datorită greutății proprii (în absența forțelor exterioare). Lungimea barei (*lungimea admisibilă*), când numai sub greutatea proprie în bară se atinge tensiunea admisibilă, rezultă din relația 5.3-5:

$$\sigma_a - \gamma\cdot g\cdot l_a = 0 \;\Rightarrow\; l_a = \frac{\sigma_a}{\gamma\cdot g} \qquad 5.3\text{-}9$$

Pe baza relației 5.3-9, se poate determina *lungimea de rupere*, adică lungimea barei care se rupe numai sub greutate proprie:

$$l_r = \frac{\sigma_r}{\gamma \cdot g} \qquad 5.3\text{-}10$$

Dacă se are în vedere că pentru oțelul obişnuit, σ_r = 370 MPa, γ = 7,8 daN/dm^3 şi g = 10 m/s^2, se obține pentru lungimea de rupere a oțelului aproximativ valoarea l_r = 4743,58 m. În realitate nu există astfel de situații, adică bare, de aşa lungime, care să se rupă numai sub greutatea proprie.

5.4 BARA DE EGALĂ REZISTENȚĂ

La barele de secțiune constantă, când se ține seama şi de greutatea proprie, s-a văzut că există o singură secțiune (cea din încastrare) în care tensiunea normală este maximă şi egală cu cea admisibilă (pentru cazul când se face calculul de rezistență). Această situație arată că o astfel de bară este utilizată neeconomic.

Se urmăreşte acum să se stabilească forma unei astfel de bare, încât în fiecare secțiune tensiunea să fie aceeaşi şi egală cu tensiunea admisibilă σ_a. Bara care prezintă în orice secțiune aceeaşi tensiune şi egală cu tensiunea admisibilă σ_a, se numeşte *bară de egală rezistență.* Anticipând puțin, se consideră că bara de egală rezistență, are forma din Fig.5.4-1a.

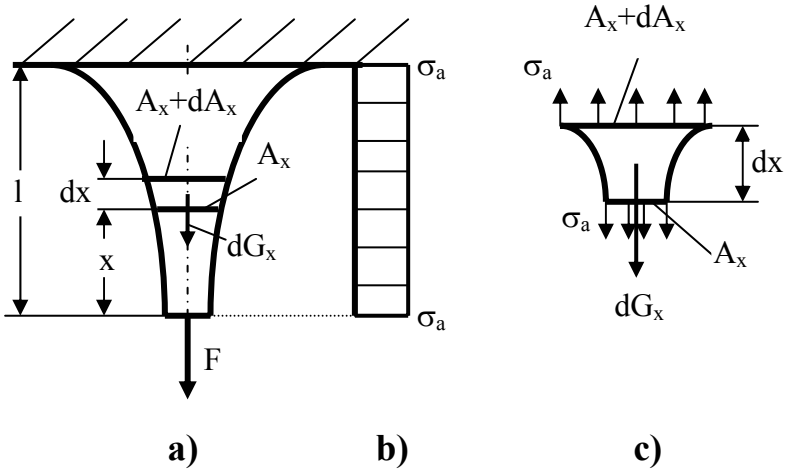


Fig.5.4-1

La distanța x de capătul liber, se decupează un element de lungime dx, pe care s-au reprezentat tensiunile şi forțele (Fig.5.4-1c). Din condiția de echilibru pentru acest element, ca o proiecție de forțe pe verticală, se obține:

$$\left(\sum F\right)_y = \sigma_a \cdot \left(A_x + dA_x\right) - \sigma_a \cdot A_x - dG_x = o$$

$$\text{unde} \quad dG_x = A_x \cdot dx \cdot \gamma \cdot g \qquad 5.4\text{-}1$$

$$\Rightarrow \quad \sigma_a \cdot dA_x - A_x \gamma \cdot g \cdot dx = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dA_x}{A_x} = \frac{\gamma \cdot g}{\sigma_a} \cdot dx \qquad 5.4\text{-}2$$

Integrând ecuația diferențială 5.4-2, se obține:

$$\ln A_x = \frac{\gamma \cdot g}{\sigma_a} \cdot x + C \qquad 5.4\text{-}3$$

Constanta de integrare C, se determină punând condițiile la limită:

Pentru x = 0

$$A_x = A_0 \quad \Rightarrow \quad \ln A_0 = C \qquad 5.4\text{-}4$$

Cu 5.4-4, relația 5.4-3, capătă forma:

$$\ln A_x = \frac{\gamma \cdot g}{\sigma_a} \cdot x + \ln A_0$$

$$\Rightarrow \quad \ln A_x - \ln A_0 = \frac{\gamma \cdot g}{\sigma_a} \cdot x \quad \Rightarrow \quad \ln \frac{A_x}{A_0} = \frac{\gamma \cdot g}{\sigma_a} \cdot x$$

$$\Rightarrow \quad \frac{A_x}{A_0} = e^{\frac{\gamma \cdot g}{\sigma_a} \cdot x}$$

$$\Rightarrow \quad A_x = A_0 \cdot e^{\frac{\gamma \cdot g}{\sigma_a} \cdot x} \qquad 5.4\text{-}5$$

unde:

A_0 - este aria secțiunii din capătul liber (acolo unde greutatea proprie nu are nici un efect) şi a cărei valoare este:

$$A_0 = \frac{F}{\sigma_a} \qquad 5.4\text{-}6$$

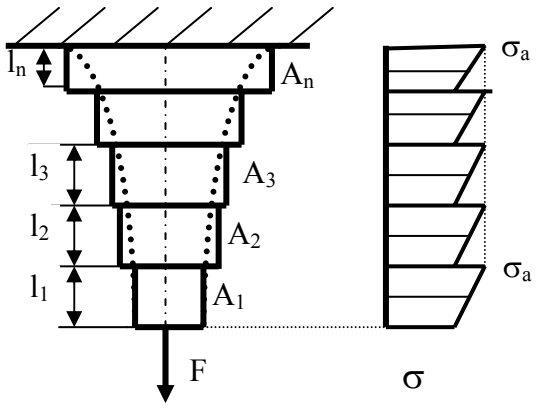
Relația 5.4-5 arată că pentru o bară de egală rezistență, aria secțiunii transversale în lungul barei, variază după o funcție exponențială.

Lungirea barei de egală rezistență se calculează relativ uşor, ştiind că la o astfel de bară, deformația specifică ε este constantă:

$$\Delta l = \varepsilon \cdot l = \frac{\sigma_a}{E} \cdot l \qquad 5.4\text{-}7$$

Realizarea practică a profilului barei de egală rezistență, implică dificultăți tehnologice deosebite. Din acest motiv, barele de egală rezistență, se realizează cu secțiune variabilă în trepte, căutând un profil cât mai apropiat de cel real. Mărirea numărului de tronsoane conduce la o apropiere de profilul real, dar în acelaşi timp, creşte consumul de manoperă.

În Fig.5.4-2a, se prezintă o bară de egală rezistență cu secțiune variabilă în trepte, iar în Fig.5.4-2b, variația tensiunii normale. La o astfel de bară, tensiunea normală numai în anumite secțiuni este egală cu cea admisibilă.



a) **b)**

Fig.5.4-2

Aria secțiunii transversale pentru fiecare tronson de arie constantă, se calculează uşor, ținând seamă de faptul că pe un tronson, pe lângă forța exterioară, acționează numai greutatea tronsoanelor situate sub cel care se calculează.

Astfel, pentru cele *n* tronsoane, aria secțiunii transversale este:

$$A_{1\ nec} = \frac{F}{\sigma_a - \gamma \cdot g \cdot l_1}$$

$$A_{2\ nec} = \frac{F + G_1}{\sigma_a - \gamma \cdot g \cdot l_2} \qquad 5.4\text{-}8$$

.

.

.

$$A_{n\ nec} = \frac{F + \sum_{i=1}^{n-1} G_i}{\sigma_a - \gamma \cdot g \cdot l_n}$$

unde:

G_i – greutatea tronsonului de ordinul i.

Bara de egală rezistență solicitată la compresiune se tratează în mod asemănător.

5.5 TENSIUNI PE O SECȚIUNE ÎNCLINATĂ LA BARA SOLICITATĂ LA TRACȚIUNE

Până acum, la bara dreaptă solicitată axial, s-a studiat numai tensiunea care apare pe o suprafață normală la axa longitudinală a barei. Pentru bara dreaptă solicitată axial, prezintă interes şi secțiunile înclinate (BD din Fig.5.5-1a) față de secțiunea transversală BC a barei.

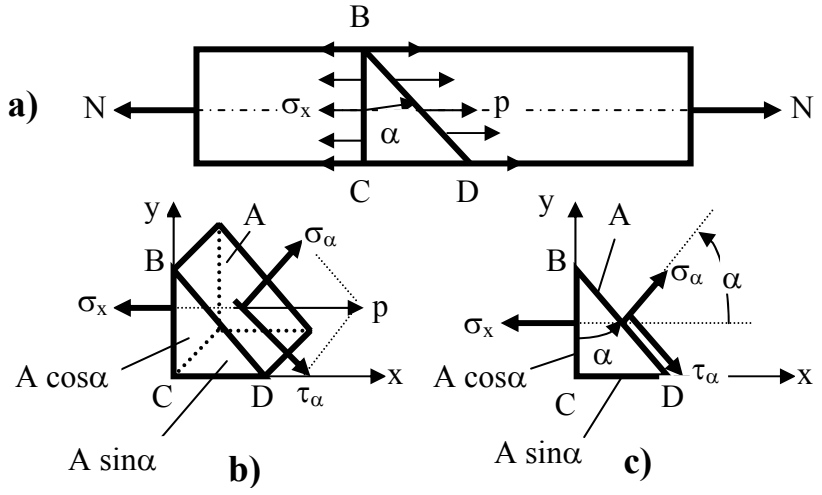


Fig.5.5-1

Pe suprafața normală la axa barei tensiunea normală σ_x se calculează cu relația cunoscută de la solicitarea axială. Dacă din bară se izolează un element de volum de grosime unitară (Fig.5.5-1a,b), pentru ca acesta să fie în echilibru trebuie ca şi pe fața înclinată BD de arie A să acționeze o tensiune ***p*** pe aceeaşi direcție cu σ_x. Tensiunea ***p*** de pe fața înclinată cu unghiul α, se descompune în două componente (Fig.5.5-1b,c): una normală la secțiunea înclinată (σ_α) şi cealaltă în planul secțiunii (τ_α) care este o tensiune tangențială. Tensiunile sunt însă uniform repartizate pe cele două suprafețe, dar forțele produse de acestea pot fi considerate concentrate în centrul de greutate al suprafeței respective.

Pentru scrierea condițiilor de echilibru se utilizează schema simplificată din Fig.5.5-1c. Ecuațiile de echilibru se scriu ca sumă de proiecții de forțe pe direcția normală la suprafața înclinată, respectiv pe direcția conținută în planul suprafeței înclinate:

Se obțin astfel ecuațiile:

$$\begin{aligned} &\sigma_\alpha \cdot A - \sigma_x \cdot A\cos\alpha \cdot \cos\alpha = 0 \\ &\tau_\alpha \cdot A - \sigma_x \cdot A\cos\alpha \cdot \sin\alpha = 0 \end{aligned} \qquad 5.5\text{-}1$$

Rezolvând sistemul 5.5-1, se obțin expresiile pentru tensiunile de pe o suprafață înclinată:

$$\begin{aligned} &\sigma_\alpha = \sigma_x \cdot \cos^2\alpha = \frac{\sigma_x}{2}\cdot(1+\cos 2\alpha) \\ &\tau_\alpha = \frac{\sigma_x}{2}\cdot \sin 2\alpha \end{aligned} \qquad 5.5\text{-}2$$

Din relația 5.5-2 rezultă că pentru $\alpha = 0$, tensiunea normală σ_α este maximă şi egală cu σ_x, iar pentru $\alpha = \pi / 2$ (suprafață paralelă cu axa barei), $\sigma_\alpha = 0$. Pentru a determina extremele tensiunii tangențiale τ_α de pe suprafața înclinată, se anulează derivata sa de ordinul întâi în raport cu unghiul 2α:

$$\begin{aligned} &\frac{d\tau_\alpha}{d(2\alpha)} = \frac{\sigma_x}{2}\cdot\cos 2\alpha = 0 \;\Rightarrow\; \cos 2\alpha = 0 \;\Rightarrow\; 2\alpha = \frac{\pi}{2} \\ &\Rightarrow \qquad \alpha = \frac{\pi}{4} \end{aligned} \qquad 5.5\text{-}3$$

Deci, tensiunile tangențiale sunt maxime pe suprafețe înclinate cu 45^0 față de direcția axei longitudinale a barei. Introducând valoarea $\alpha = 45^0$ în expresia tensiunii tangențiale (relația 5.5-2), se obține valoarea maximă a acesteia:

$$\tau_{\alpha\ max} = \tau_{\alpha=\pi/2} = \frac{\sigma_x}{2} \cdot \sin 2\frac{\pi}{4} = \frac{\sigma_x}{2} \qquad 5.5\text{-}4$$

Pe secțiuni înclinate cu 45^0 rezultă tensiuni tangențiale maxime a căror valoare este jumătate din valoarea tensiunii normale ce acționează pe suprafața transversală a barei.

Pentru un element de rezistență, când ruperea acestuia s-a produs după o suprafață normală la axa longitudinală a barei (secțiune transversală), aceasta s-a datorat valorii mari a tensiunii normale ($\sigma_x = \sigma_{max}$) din această secțiune. Când ruperea are loc după o suprafață înclinată cu 45^0 față de direcția tensiunii normale σ_x, ruperea este cauzată de tensiunea tangențială maximă ($\tau_{max} = \sigma_x / 2$). Un exemplu elocvent de o astfel de rupere la 45^0 față de direcția de solicitare este ruperea fontei la solicitarea de compresiune.

5.6 ENERGIA DE DEFORMAȚIE LA SOLICITAREA AXIALĂ

Se consideră curba caracteristică a unui oțel (Fig.5.6-1) pe care în porțiunea liniară se fixează două puncte B şi C, infinit apropiate.

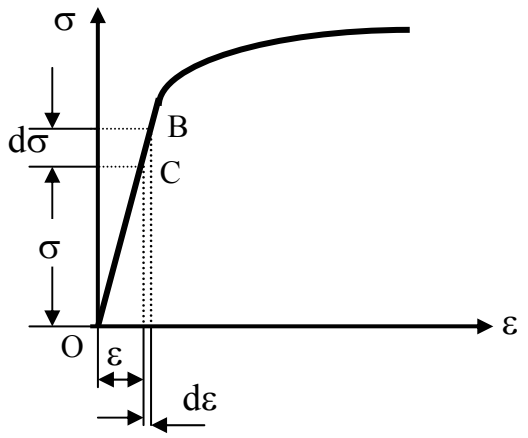


Fig.5.6-1

Punctului C îi corespund coordonatele (σ ; ε), iar punctului B, coordonatele ($\sigma+d\sigma$; $\varepsilon+d\varepsilon$). Forțele exterioare care solicită elementul (epruveta) efectuează lucru mecanic care se acumulează ca energie de deformație în element. Dacă elementul are secțiune constantă de arie A, efortul axial trebuie să fie:

$$N = \sigma \cdot A \qquad 5.6\text{-}1$$

Prin trecerea de la punctul C la B când se poate considera că efortul axial N este constant (punctele sunt infinit apropiate), elementul se lungeşte cu

$$d(\Delta l) = d\varepsilon \cdot l \qquad 5.6\text{-}2$$

Lucrul mecanic produs de forța exterioară egală cu efortul axial N, în domeniul comportării elastice a materialului, conform principiului lui Clapeyron, se transformă integral în energie de deformație:

$$dL = dU = N \cdot d(\Delta l) = A \cdot \sigma \cdot d\varepsilon \cdot l = A \cdot l \cdot \sigma \cdot d\varepsilon \qquad 5.6\text{-}3$$

În domeniul în care sunt plasate punctele C şi B, fiind valabilă legea lui Hooke, se poate scrie:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \;\; \Rightarrow \;\; d\varepsilon = \frac{d\sigma}{E} \qquad 5.6\text{-}4$$

Ținând seama de relația 5.6-4, relația 5.6-3 devine

$$dL = A \cdot l \cdot \frac{\sigma}{E} \cdot d\sigma \qquad 5.6\text{-}5$$

Dacă relația 5.6-5 se integrează între limitele 0 şi σ, se obține expresia lucrului mecanic al forțelor exterioare şi implicit a *energiei totale de deformație* înmagazinată în bară:

$$L = U = \int_0^{\sigma} dL = \int_0^{\sigma} A \cdot l \cdot \frac{\sigma}{E} \cdot d\sigma = A \cdot l \cdot \frac{\sigma^2}{2 \cdot E} = V \cdot \frac{\sigma^2}{2 \cdot E} \qquad 5.6\text{-}6$$

unde:

V – volumul barei (s-a considerat aria secțiunii transversale, constantă).

Energia de deformație specifică (a unității de volum) se deduce din relația 5.6-6 şi este:

$$U_1 = \frac{U}{V} = \frac{\sigma^2}{2 \cdot E} \qquad 5.6\text{-}7$$

Se poate determina şi energia de deformație acumulată în unitatea de volum dU:

$$dU = U_1 \cdot dV = \frac{\sigma^2}{2 \cdot E} \cdot dV \qquad 5.6\text{-}8$$

Pentru un element la care aria secțiunii nu este constantă, energia totală de deformație se calculează cu relația:

$$U = \int_V dU = \int_V \frac{\sigma^2}{2 \cdot E} \cdot dV \qquad 5.6\text{-}9$$

sau în funcție de efortul axial N, când

$$\sigma = \frac{N}{A} \quad \text{şi} \quad dV = A \cdot dx$$

$$U = \int_0^l \frac{N^2}{2 \cdot E \cdot A} \cdot dx \qquad 5.6\text{-}10$$

Dacă pe intervalul de lungime l, bara are efortul axial N şi rigiditatea EA constante, atunci pe acel interval, energia totală de deformație este (rezultă din relația 5.6-10):

$$U = \frac{N^2 \cdot l}{2 \cdot E \cdot A} \qquad 5.6\text{-}11$$

Dacă în relația 5.6-7 se înlocuieşte tensiunea normală funcție de deformația specifică

$$\sigma = \varepsilon \cdot E$$

relația pentru energia de deformație specifică capătă forma:

$$U_1 = \frac{\sigma \cdot \varepsilon}{2} \qquad 5.6\text{-}12$$

Relația 5.6-12, arată că energia de deformație specifică este egală cu aria suprafeței de sub curba caracteristică la tracțiune. Convențional însă, această constatare poate fi extinsă până la rupere.

5.7 SISTEME STATIC NEDETERMINATE LA SOLICITAREA AXIALĂ

Dacă la un sistem, necunoscutele (reacțiuni sau eforturi) nu pot fi determinate cu ajutorul ecuațiilor de echilibru, atunci sistemul este *static nedeterminat. Gradul de nedeterminare al sistemului, este dat de diferența dintre numărul necunoscutelor şi numărul ecuațiilor de echilibru scrise*.

Pentru rezolvarea sistemelor static nedeterminate (în prima etapă aflarea necunoscutelor), este nevoie de ecuații suplimentare, atâtea cât este şi gradul de nedeterminare. Ecuațiile suplimentare rezultă din explicitarea relațiilor care se scriu între deformațiile sau deplasările diferitelor elemente componente ale sistemului sau ale secțiunilor acestora. După găsirea acestor ecuații suplimentare (numărul lor este egal cu gradul de nedeterminare) şi determinarea necunoscutelor, problema devine una obişnuită, uşor de rezolvat.

Studiul sistemelor static nedeterminate solicitate axial se face pe cazuri de probleme concrete, ceea ce va uşura mult înțelegerea modului de rezolvare al acestor probleme.

5.7.1 Sisteme de bare articulate concurente, static nedeterminate

Fie sistemul de trei bare solicitat de o forță F ca în Fig.5.7.1-1a. Cunoscându-se: $A_1 = A_2 = 1\ cm^2$, $A_3 = 2\ A_2 = 2\ cm^2$, $E_1 = E_2 = E_3 = 2{,}1 \cdot 10^5$ *MPa*, $\alpha = 30^0$, $F = 50$ *KN şi* $a = 0{,}5$ *m*, $\sigma_a = 160$ *MPa, se cere:*

a) tensiunile maxime din cele trei bare

b) deplasarea pe verticală a articulației comune (a articulației C).

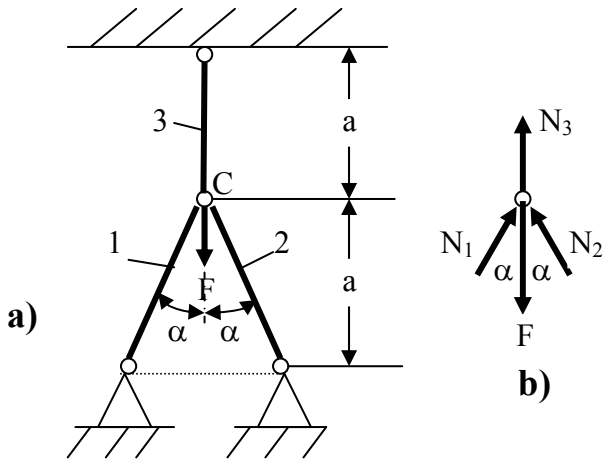


Fig.5.7.1-1

Fiind bare articulate şi neîncărcate pe lungimea lor, nu preiau decât eforturi axiale. Eforturile axiale din cele trei bare sunt evidențiate în Fig.5.7.1-1b.

Determinarea eforturilor se face punând condițiile de echilibru pentru sistemul din Fig.5.7.1-1b. Pentru acest sistem nu se poate scrie ecuația de momente, deoarece barele sunt concurente în articulația C. Deja se evidențiază faptul că există trei necunoscute (eforturile axiale N_1, N_2, N_3) şi se pot scrie numai două ecuații de echilibru (proiecții de forțe):

$$\left(\sum F\right)_x = 0 \;\Rightarrow\; N_1 \cdot \sin\alpha - N_2 \cdot \sin\alpha = 0 \;\Rightarrow\; N_1 = N_2 \qquad 5.7.1\text{-}1$$

$$\left(\sum F\right)_y = 0 \;\Rightarrow\; 2 \cdot N_1 \cdot \cos\alpha + N_3 = F \qquad 5.7.1\text{-}2$$

Numai din relațiile 5.7.1-1 şi 5.7.1-2 nu se pot determina cele trei eforturi. Rezultă că sistemul este static nedeterminat o dată (3 necunoscute şi 2 ecuații de echilibru, 3-2=1). Relația suplimentară se găseşte din analiza modului de deformare al celor trei bare (Fig.5.7.1-2). În Fig.5.7.1-2, prin linie întreruptă este prezentată poziția celor trei bare înainte de solicitare (în stare nedeformată).

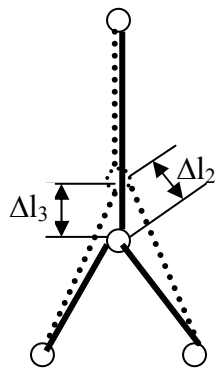


Fig.5.7.1-2

Între deformațiile celor trei bare, din Fig.5.7.1-2, rezultă următoarea relație:

$$\Delta l_1 = \Delta l_2 = \Delta l_3 \cdot \cos\alpha$$

care explicitată în funcție de mărimile care intervin, capătă forma:

$$\frac{N_2 \cdot \dfrac{a}{\cos\alpha}}{E \cdot A_2} = \frac{N_3 \cdot a}{E \cdot A_3} \qquad 5.7.1\text{-}3$$

şi reprezintă cea de-a treia ecuație necesară determinării eforturilor axiale din bare.

După rezolvarea sistemului format din ecuațiile 5.7.1-1, 5.7.1-2 şi 5.7.1-3, rezultă pentru eforturile axiale, valorile:

$$N_1 = N_2 = 0{,}227\ F = 11{,}37\ KN$$
$$N_3 = 0{,}606\ F = 30{,}31\ \ KN.$$

a) Cu aceste valori pentru eforturi, se obțin tensiunile normale din cele trei bare ale sistemului din Fig.5.7.1-1a:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{11{,}37 \cdot 10^3}{100} = 113{,}7\ \ \text{MPa}$$

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{A_3} = \frac{30{,}31 \cdot 10^3}{200} = 151{,}5\ \ \text{MPa}$$

Valorile tensiunii normale rezultate sunt mai mici decât cele admisibile.

c) Deplasarea articulației comune C (Fig.5.7.1-2b), este uşor de calculat:

$$\delta_C = \Delta l_3 = \frac{N_3 \cdot a}{E \cdot A_3} = \frac{30{,}31 \cdot 10^3 \cdot 500}{2{,}1 \cdot 10^5 \cdot 200} = 0{,}361\ \ \text{mm}$$

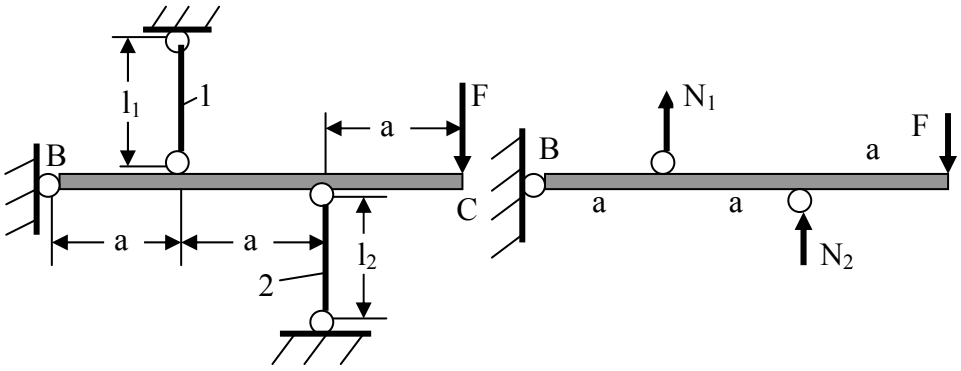
5.7.2 Sisteme de bare articulate neconcurente, static nedeterminate

Fie sistemul de bare articulate neconcurente din Fig.5.7.2-1a. Cunoscând $l_1 = l_2 = 0{,}5$ m, $d_1 = d_2 = 20$ mm, $E = 2 \cdot 10^5$ MPa, $\sigma_a = 150$ MPa, se cere:

a) valoarea maximă admisă pentru forța F

b) deplasarea pe verticală a punctului de aplicație al forței F.

Grinda BC este rigidă (nedeformabilă).



a) **b)**

Fig.5.7.2-1

a) Eforturile din cele două bare sunt evidențiate în Fig.5.7.2-1b. Pentru acest sistem se scrie o ecuație de echilibru, ca o sumă de momente față de articulația B. Nu se mai scriu ecuații de proiecții de forțe, deoarece aceste ecuații ar introduce şi reacțiunile din articulația B şi astfel nu se obține nimic în plus.

$$\left(\sum M\right)_B = 0 \;\Rightarrow\; N_1 \cdot a + N_2 \cdot 2a = F \cdot 3a$$
$$\Rightarrow\; N_1 + 2 \cdot N_2 = 3 \cdot F \qquad 5.7.2\text{-}1$$

S-a obținut o relație şi sunt două necunoscute: N_1 şi N_2. Rezultă că acest sistem este un sistem static nedeterminat o singură dată. Relația suplimentară se obține din Fig.5.7.2-2, unde starea nedeformată a sistemului este prezentată prin linie întreruptă.

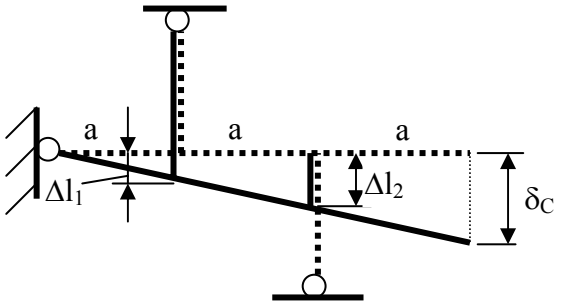


Fig.5.7.2-2

Din Fig.5.7.2-2 se obține relația între deformațiile celor două bare (din asemănarea triunghiurilor):

$$\Delta l_2 = 2 \cdot \Delta l_1 \;\Rightarrow\; \frac{N_2 \cdot l_2}{E \cdot A_2} = 2 \cdot \frac{N_1 \cdot l_1}{E \cdot A_1}$$

de unde rezultă ecuația suplimentară căutată:

$$N_2 = 2 \cdot N_1 \qquad 5.7.2\text{-}2$$

Rezolvarea sistemului format de ecuațiile 5.7.2-1 şi 5.7.2-2 conduce la următoarele valori ale eforturilor axiale:

$$N_1 = \frac{3}{5} \cdot F = 0{,}6 \cdot F$$
$$N_2 = \frac{6}{5} \cdot F = 1{,}2 \cdot F \qquad 5.7.2\text{-}3$$

Cum cele două bare au aceeaşi arie a secțiunii transversale, rezultă că mai periculoasă este bara 2, deoarece efortul axial din aceasta este mai mare decât cel din bara 1. Sarcina capabilă se va determina atunci din condiția de rezistență a barei 2:

$$N_2 = 1{,}2 \cdot F = A_1 \cdot \sigma_a \quad \Rightarrow \quad F = \frac{A_1 \cdot \sigma_a}{1{,}2} = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot \frac{\sigma_a}{1{,}2} = \frac{\pi \cdot 400}{4} \cdot \frac{150}{1{,}2} =$$
$$= 39267 \text{ N} \approx 39{,}27 \text{ KN}$$

c) Deplasarea punctului de aplicație a forței F, se determină tot din Fig.5.7.2-2, rezultând:

$$\delta_C = 3 \cdot \Delta l_1 = 3 \cdot \frac{N_1 \cdot l_1}{E \cdot A_1} = 3 \cdot \frac{0{,}6 \cdot 39{,}27 \cdot 10^3 \cdot 500}{2 \cdot 10^5 \cdot 100 \cdot \pi} \approx 0{,}56 \text{ mm}$$

5.7.3 Sisteme cu inexactități de execuție

La executarea unei structuri de rezistență, nu se poate realiza o dimensiune exactă a diferitelor elemente. Totdeauna, trebuie avut în vedere posibilitatea existenței unei mici inexactități de execuție.

În cazul sistemelor static determinate, inexactitățile de execuție nu provoacă nici un fel de tensiuni suplimentare.

În cazul sistemelor static nedeterminate, datorită montării forțate ca urmare a existenței unor inexactități de execuție, în elementele de rezistență se creează tensiuni suplimentare. De multe ori, aceste tensiuni sunt mari, iar suprapuse peste cele create de forțele exterioare, pot compromite capacitatea de rezistență a elementelor.

Se vor prezenta două cazuri în care se întâlnesc inexactități de execuție, iar montarea sistemului se realizează forțat.

a) ***Bare articulate static nedeterminate, cu inexactități de execuție***

Pentru sistemul din Fig.5.7.3-1a la care dintr-o greşeală de execuție bara din mijloc s-a realizat mai scurtă cu $\delta = 2$ mm, se cere să se calculeze tensiunile care apar în bare dacă montarea sistemului se face forțat. Se cunosc: $h = 4$ m, $a = 1$ m, $E = 2 \cdot 10^5$ MPa, iar barele sunt circulare cu diametrul $d = 20$ mm.

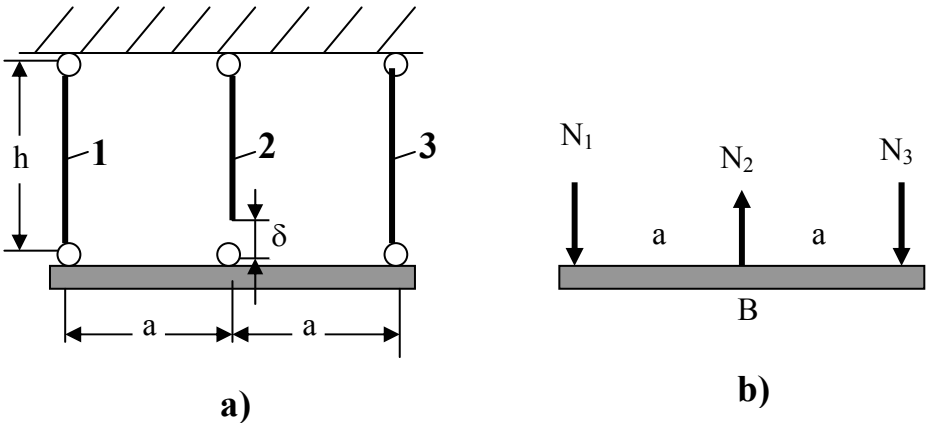


Fig.5.7.3-1

Montajul forțat se poate realiza prin lungirea barei 2 şi scurtarea barelor 1 şi 3. Sensul real al eforturilor axiale din cele trei bare este prezentat în Fig.5.7.3-1b. Pentru acest sistem se pun şi condițiile de echilibru, ca o sumă de forțe pe verticală şi o sumă de momente față de punctul de aplicație al efortului axial din bara 2 (punctul B):

$$\left(\sum F\right)_y = 0 \quad \Rightarrow \quad N_1 + N_3 = N_2 \qquad 5.7.3\text{-}1$$

$$\left(\sum M\right)_B = 0 \quad \Rightarrow \quad N_1 \cdot a - N_3 \cdot a = 0$$
$$\Rightarrow \quad N_1 = N_3 \qquad 5.7.3\text{-}2$$

Şi în acest caz, sistemul este static nedeterminat, deoarece sunt trei necunoscute (eforturile axiale) şi se pot scrie numai două ecuații de echilibru. Ecuația suplimentară necesară, rezultă din analiza modului de deformare a barelor la montarea forțată a sistemului. Deformațiile barelor la montarea lor forțată este prezentată în Fig.5.7.3-2. Din Fig.5.7.3-2, rezultă:

$$\Delta l_1 + \Delta l_2 = \delta \qquad 5.7.3\text{-}3$$

care explicitată, capătă forma:

$$\frac{N_1 \cdot h}{E \cdot A_1} + \frac{N_2 \cdot h}{E \cdot A_2} = \delta \qquad 5.7.3\text{-}4$$

de unde având în vedere că $A_1 = A_2 = A$, se obține:

$$N_1 + N_2 = \frac{E \cdot A}{h} \cdot \delta \qquad 5.7.3\text{-}5$$

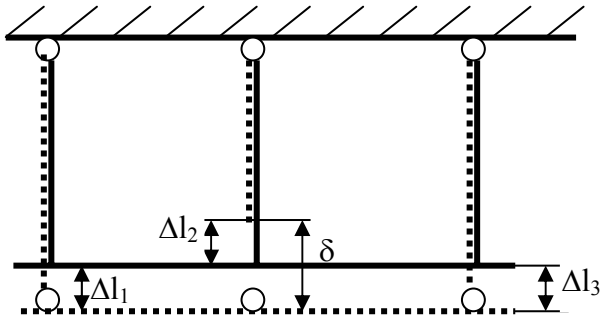


Fig.5.7.3-2

Rezolvând sistemul format de ecuațiile 5.7.3-1, 5.7.3-2 şi 5.7.3-5, se obțin pentru cele trei eforturi, valorile:

$$\begin{aligned} N_1 = N_3 &= \frac{E \cdot A}{3 \cdot h} \cdot \delta = 10{,}46 \ \text{KN} \\ N_2 &= 2 \cdot N_1 = 20{,}92 \ \text{KN} \end{aligned} \qquad 5.7.3\text{-}6$$

Tensiunile create în bare după montarea lor forțată sunt:

$$\begin{aligned} \sigma_1 = \sigma_3 &= \frac{N_1}{A_1} = -\frac{10{,}46 \cdot 10^3}{100 \cdot \pi} = -33{,}29 \ \text{MPa} \\ \sigma_2 &= \frac{N_2}{A_2} = \frac{20{,}92 \cdot 10^3}{100 \cdot \pi} = 66{,}58 \ \text{MPa} \end{aligned} \qquad 5.7.3\text{-}7$$

În bara 1 şi 3, tensiunile sunt de compresiune, iar în bara 1, de întindere. Se poate constata că la montarea forțată a elementelor de rezistență, se creează suplimentar tensiuni destul de mari. În practică, existența unor astfel de tensiuni datorate montării forțate a unor elemente nu poate fi neglijată.

b) ***Bare drepte solicitate axial, care prezintă un rost*** (spațiu) ***la un capăt***

Se consideră bara dreaptă din Fig.5.7.3-3a, care dintr-o greşeală s-a executat mai scurtă cu δ. Să se calculeze tensiunea maximă care apare în bară după aplicarea sistemului de forțe. Se cunosc: $\delta = 0{,}1$ mm, $A_2 = 2\ A_1 = 1000$ mm^2, $a = 0{,}5$ m, $E_1 = E_2 = 2 \cdot 10^5$ MPa, $F = 24$ KN.

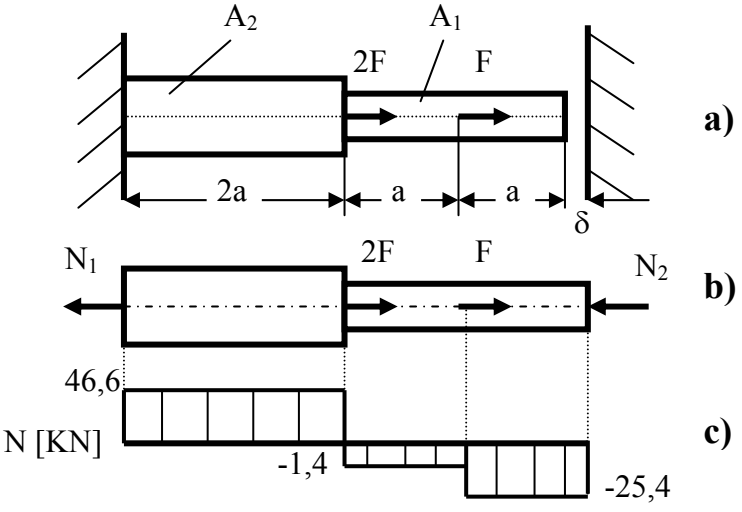


Fig.5.7.3-3

După aplicarea forțelor, bara se deformează ajungând cu capătul din dreapta în reazem.

Acțiunea forțelor exterioare este prezentată în Fig.5.7.3-3b. Se poate pune o singură condiție de echilibru şi anume o sumă de forțe pe orizontală:

$$\left(\sum F\right)_x = 0 \;\Rightarrow\; N_1 - 2F - F + N_2 = 0 \;\Rightarrow\; N_1 + N_2 = 3F \qquad 5.7.3\text{-}8$$

Bara din Fig.5.7.3-3 este static nedeterminată, deoarece există două necunoscute (reacțiunile din înțepeniri) şi se poate scrie o singură ecuație de echilibru.

Relația suplimentară rezultă din condiția că lungirea totală a barei (între cele două reazeme) este egală cu δ:

$$\Delta l_{tot} = \delta \;\Rightarrow\; \frac{N_1 \cdot 2a}{E \cdot A_2} + \frac{(N_1 - 2F)\cdot a}{E \cdot A_1} + \frac{(N_1 - 2F - F)\cdot a}{E \cdot A_1} = \delta \;\Rightarrow\; \frac{N_1 \cdot 2a}{E \cdot 2A_1} + \frac{(N_1 - 2F)\cdot a}{E \cdot A_1} + \frac{(N_1 - 3F)\cdot a}{E \cdot A_1} = \delta \qquad 5.7.3\text{-}9$$

$$\Rightarrow\; N_1 = \frac{5}{3}\cdot F + \frac{E \cdot A_1 \cdot \delta}{3 \cdot a} \approx 46{,}6 \;\; KN \qquad 5.7.3\text{-}10$$

Diagrama de efort axial este prezentată în Fig.5.7.3-3c, de unde rezultă că intervalul periculos este cel din dreapta, de arie A_1 şi pe care acționează efortul axial de compresiune N_2 = - 25,4 KN.

Tensiunea maximă în bara studiată, rezultată după aplicarea forțelor F, este:

$$\sigma_{max} = \frac{N_2}{A_1} = -\frac{25{,}4 \cdot 10^3}{500} = -50{,}8 \text{ MPa}$$

Observație: *În cazul barelor asemănătoare, dar care nu prezintă rostul δ (bara este fixată la ambele capete), calculul se face similar numai că în relația 5.7.3-9, $\Delta l_{total} = 0$.*

5.7.4 Bare cu secțiune neomogenă, solicitate axial

Secțiunile neomogene sunt acele secțiuni care în puncte diferite, prezintă proprietăți diferite. Asemenea elemente de rezistență se întâlnesc frecvent în practică: stâlpii de beton armat, cabluri de aluminiu sau cupru cu inimă de oțel, etc. La aceste elemente se studiază modul de repartizare al efortului axial pe fiecare material, dacă se cunoaşte forța exterioară aplicată elementului ca un tot unitar (Fig.5.7.4-1a)

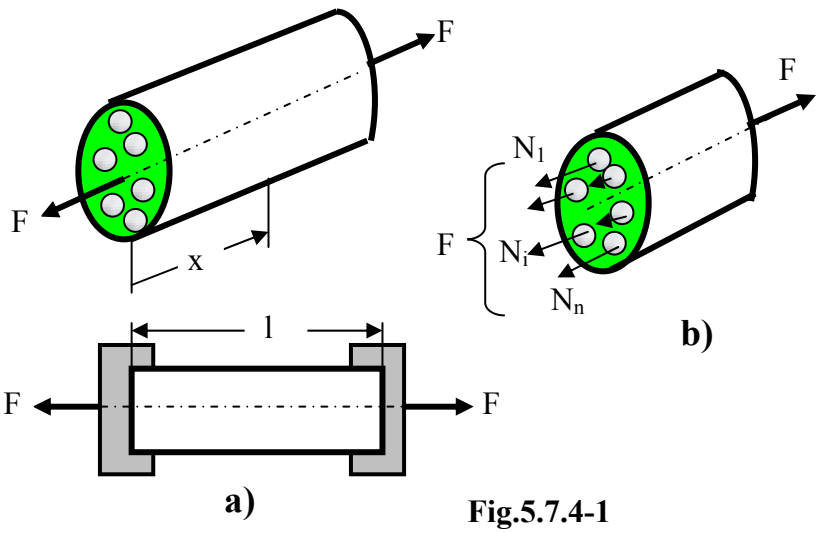


Fig.5.7.4-1

În Fig.5.7.4-1b sunt prezentate eforturile axiale N_1, ... N_i, ...N_n din secțiune pentru cele *n* materiale diferite. Punând condiția de echilibru ca o sumă de forțe pe axa longitudinală a barei, pentru acest element, se obține:

$$\left(\sum F\right)_x = 0 \;\Rightarrow\; N_1 + N_2 + N_3 + ... + N_n = F \qquad 5.7.4\text{-}1$$

Se poate scrie o singură ecuație şi sunt *n* necunoscute. Rezultă că sistemul este de (*n* - 1) ori static nedeterminat. Relațiile suplimentare, rezultă din condiția că toate materialele componente suferă aceeaşi deformație:

$$\Delta l_1 = \Delta l_2 = \Delta l_3 = ... = \Delta l_n$$

$$\Rightarrow \quad \frac{N_1 \cdot l}{E_1 \cdot A_1} = \frac{N_2 \cdot l}{E_2 \cdot A_2} = \frac{N_3 \cdot l}{E_3 \cdot A_3} = ... = \frac{N_n \cdot l}{E_n \cdot A_n} \qquad 5.7.4\text{-}2$$

Ținând seamă de relația 5.7.4-1, relația 5.7.4-2 poate fi scrisă (după simplificare cu lungimea l) sub forma:

$$\frac{N_1}{E_1 \cdot A_1} = \frac{N_2}{E_2 \cdot A_2} = \frac{N_3}{E_3 \cdot A_3} = ... = \frac{N_n}{E_n \cdot A_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} N_i}{\sum_{i=1}^{n} E_i \cdot A_i} = \frac{F}{\sum_{i=1}^{n} E_i \cdot A_i} \qquad 5.7.4\text{-}3$$

Din relația 5.7.4-3 rezultă eforturile axiale şi tensiunile normale din fiecare material:

$$N_1 = \frac{E_1 \cdot A_1}{\sum_{i=1}^{n} E_i \cdot A_i} \cdot F \quad \Rightarrow \quad \sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{E_1}{\sum_{i=1}^{n} E_i \cdot A_i} \cdot F$$

$$N_2 = \frac{E_2 \cdot A_2}{\sum_{i=1}^{n} E_i \cdot A_i} \cdot F \quad \Rightarrow \quad \sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{E_2}{\sum_{i=1}^{n} E_i \cdot A_i} \cdot F$$

$$\begin{matrix} . \\ . \\ . \end{matrix} \qquad 5.7.4\text{-}4$$

$$N_n = \frac{E_n \cdot A_n}{\sum_{i=1}^{n} E_i \cdot A_i} \cdot F \quad \Rightarrow \quad \sigma_n = \frac{N_n}{A_n} = \frac{E_n}{\sum_{i=1}^{n} E_i \cdot A_i} \cdot F$$

Un astfel de element de rezistență ar lucra în condiții economice, dacă în fiecare material tensiunea maximă este egală cu tensiunea admisibilă a fiecăruia, respectiv dacă condiția de deformații ar fi de forma:

$$\frac{\sigma_{a1}}{E_1} = \frac{\sigma_{a2}}{E_2} = ... = \frac{\sigma_{an}}{E_n}$$

În general, o astfel de relație nu poate fi satisfăcută. Din acest motiv, la dimensionarea unui element de rezistență cu secțiune neomogenă, se va impune atingerea tensiunii admisibile numai în unul dintre materiale (cel mai periculos), celelalte rămânând solicitate sub tensiunea admisibilă.

Aplicație. *Să se verifice elementele de rezistență ale sistemului din Fig.5.7.4-2a, pentru care se cunosc: F = 100 KN, δ = 0,1 mm, $E_{OL} = E_0 = 2\cdot10^5$ MPa, $E_{Cu} = E_c = 10^5$ MPa, $\sigma_{aOL} = \sigma_{a0}$ = 150 MPa, $\sigma_{aCu} = \sigma_{ac}$ = 50 MPa, d = 20 mm, d_1 = 35 mm, d_2 = 50 mm, l = 1 m.*

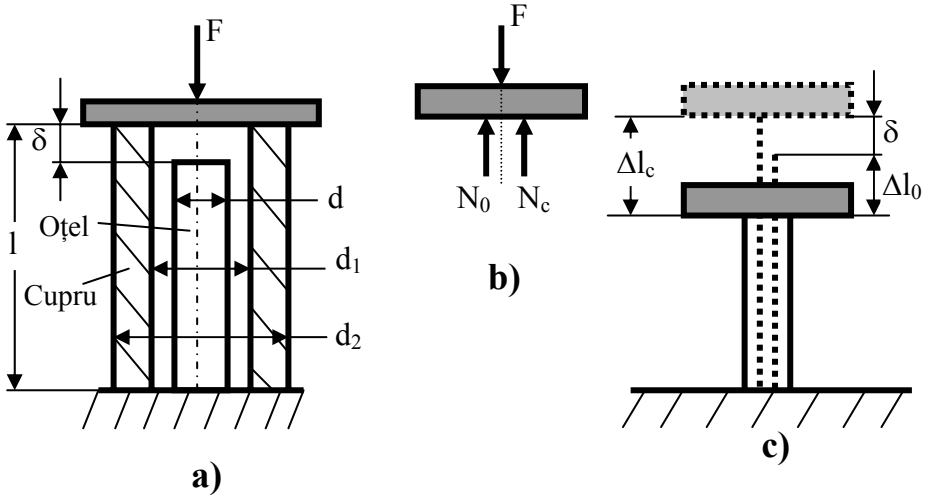


Fig.5.7.4-2

Ambele elemente sunt solicitate la compresiune dacă cea din cupru se scurtează sub acțiunea forței exterioare F cu mai mult de δ. Pentru acest exemplu, scurtarea barei din cupru sub acțiunea forței F este mai mare decât rostul δ. Eforturile axiale din cele două bare ($N_{OL} = N_0$, $N_{Cu} = N_c$), care iau naştere, se opun acțiunii forței F (Fig.5.7.4-2b). Condiția de echilibru pusă ca o sumă de forțe pe verticală conduce la relația:

$$\left(\sum F\right)_y = 0 \quad \Rightarrow \quad N_0 + N_c = F \qquad 5.7.4\text{-}5$$

Şi acest sistem este static nedeterminat, deoarece nu se mai pot scrie ecuații de echilibru şi există două necunoscute: eforturile axiale din cele două materiale.

Ecuația suplimentară rezultă din analiza modului de deformare al celor două bare sub acțiunea forței exterioare F (Fig.5.7.4-2c). Relația de deformații care se obține este:

$$\Delta l_c - \Delta l_0 = \delta \qquad 5.7.4\text{-}6$$

care explicitată conduce la relația:

$$\frac{N_c \cdot l}{E_c \cdot A_c} - \frac{N_0 \cdot l}{E_0 \cdot A_0} = \delta \qquad 5.7.4\text{-}7$$

După rezolvarea sistemului format de ecuațiile 5.7.4-5 şi 5.7.4-7, se obțin pentru eforturile axiale din cele două materiale, valorile

$N_c = N_{Cu} = 74{,}49$ KN
$N_0 = N_{OL} = 25{,}51$ KN.

Tensiunile care iau naştere în cele două materiale, sunt:

$$\sigma_{OL} = \frac{N_{OL}}{A_{OL}} = \frac{N_{OL}}{\frac{\pi \cdot d^2}{4}} = -81{,}24 \ \text{MPa} < \sigma_{aOL}$$

$$\sigma_{Cu} = \frac{N_{Cu}}{A_{Cu}} = \frac{N_{Cu}}{\frac{\pi}{4} \cdot \left(d_2^2 - d_1^2\right)} = -50{,}58 \ \text{MPa} < \sigma_{aCu}$$

5.7.5 Bare supuse variațiilor de temperatură

La calculul barelor care prezentau inexactități de execuție, s-a văzut că la montarea forțată chiar în lipsa unor forțe exterioare, apar tensiuni uneori destul de mari. Tensiuni, în absența forțelor exterioare, pot apărea şi datorită variațiilor de temperatură la care sunt supuse elementele de rezistență, în mod voit sau accidental. Tensiuni de acest fel, spre exemplu, se produc în şinele de cale ferată vara când temperatura creşte mult sau iarna când aceasta scade semnificativ sub 0^0 C. În urma variației temperaturii şinelor în raport cu temperatura la care acestea s-au montat, în şine apar tensiuni normale de întindere sau compresiune, funcție de sensul variației temperaturii (compresiune la creşterea temperaturii şi întindere la scăderea acesteia).

Fie o bară de lungime l şi secţiune constantă de arie A, confecţionată dintr-un material cu coeficient de dilatare termică liniară α. Dacă bara suferă o modificare de temperatură Δt, ea se deformează cu cantitatea:

$$\Delta l = \alpha \cdot l \cdot \Delta t \qquad 5.7.5\text{-}1$$

Această deformaţie dacă se produce liber (la sisteme static determinate) nu produce tensiuni. În sisteme static nedeterminate când deformaţiile produse de variaţia de temperatură sunt împiedicate (Fig.5.7.5-1a), variaţia de temperatură produce tensiuni.

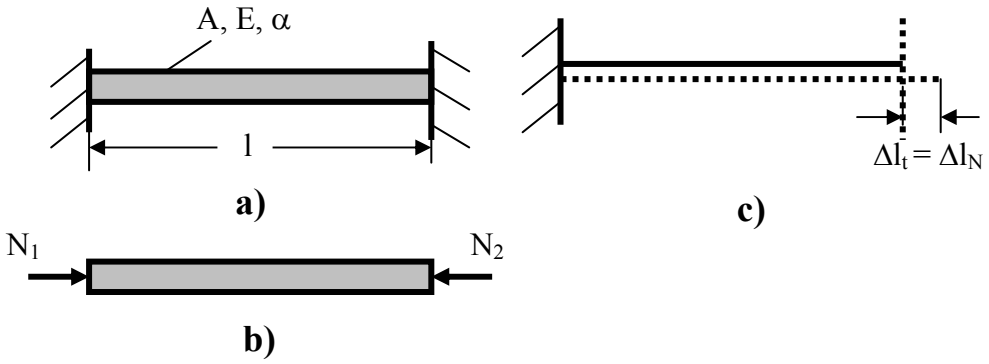


Fig.5.7.5-1

Pentru bara din Fig.5.7.5-1a, dilatarea sa nu este permisă datorită acţiunii reazemelor (reacţiunilor, Fig.5.7.5-1b). Înseamnă că întreaga deformaţie datorată variaţiei de temperatură, este preluată de efortul axial de compresiune din bară (Fig.5.7.5-1c).

Din condiţia de echilibru scrisă pentru reprezentarea din Fig.5.7.5-1b, rezultă relaţia:

$$\left(\sum F\right)_x = 0 \;\Rightarrow\; N_1 - N_2 = 0 \;\Rightarrow\; N_1 = N_2 = N \qquad 5.7.5\text{-}2$$

iar din condiţia de deformaţii (Fig.5.7.5-1c) se obţine:

$$\Delta l_t = \Delta l_N \;\Rightarrow\; \alpha \cdot l \cdot \Delta t = \frac{N \cdot l}{E \cdot A} \qquad 5.7.5\text{-}3$$

Din relaţia 5.7.5-3 se determină mărimea efortului axial din bară, datorat variaţiei de temperatură:

$$N = E \cdot A \cdot \alpha \cdot \Delta t \qquad 5.7.5\text{-}4$$

iar tensiunea normală din bară este:

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{E \cdot A \cdot \alpha \cdot \Delta t}{A} = E \cdot \alpha \cdot \Delta t \qquad 5.7.5\text{-}5$$

Relația 5.7.5-5 arată că tensiunea normală la o bară cu secțiune constantă, nu depinde de mărimea secțiunii, ci numai de material (prin E şi α) şi de variația de temperatură la care este supusă.

Dacă la o bară, la un capăt există un rost (spațiu) δ, relația de deformații este de forma:

$$\Delta l_t - \Delta l_N = \delta \qquad 5.7.5\text{-}6$$

de unde se determină apoi efortul axial N. Dacă efortul axial N rezultă negativ, înseamnă că dilatarea datorată variației temperaturii nu este suficient de mare pentru a umple rostul şi ca urmare bara nu este solicitată (nu apar reacțiunile din reazeme care să solicite bara).

Pentru elementul de rezistență supus variației de temperatură format din mai multe bare puse cap la cap, sau dintr-o singură bară cu secțiune variabilă, efortul axial N este acelaşi pentru toate barele.

Efectul defavorabil datorat dilatării împiedicate, se înlătură pe cât posibil prin lăsarea unor rosturi de dilatare, prin aşezarea elementelor pe reazeme cu role, prin curbarea elementului (în cazul conductelor), etc.

Aplicație. *La ce diferență de temperatură Δt poate fi supusă bara din Fig.5.7.5-2a, pentru a nu se depăşi tensiunea admisibilă σ_a.*

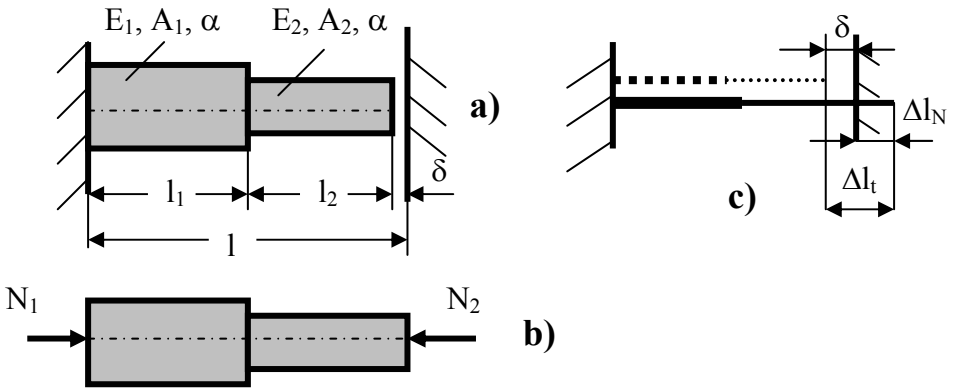


Fig.5.7.5-2

Din Fig.5.7.5-2b, punând condiția de echilibru, rezultă relația:

$$\left(\sum F\right)_x = 0 \;\Rightarrow\; N_1 - N_2 = 0 \;\Rightarrow\; N_1 = N_2 = N \qquad 5.7.5\text{-}7$$

Relația suplimentară de deformații, rezultă din analiza modului de deformare a barei sub acțiunea temperaturii şi a reazemelor (Fig.5.7.5-2c):

$$\Delta l_t - \Delta l_N = \delta$$

$$\Rightarrow \quad \alpha \cdot l_1 \cdot \Delta t + \alpha \cdot l_2 \cdot \Delta t - \left(\frac{N \cdot l_2}{E \cdot A_2} + \frac{N \cdot l_1}{E \cdot A_1} \right) = \delta \qquad 5.7.5\text{-}8$$

După efectuarea calculelor, se ajunge la următoarea expresie pentru efortul axial din bară:

$$N = N_1 = N_2 = \frac{E \cdot (\alpha \cdot \Delta t \cdot l - \delta)}{\dfrac{l_1 \cdot A_2 + l_2 \cdot A_1}{A_1 \cdot A_2}} = \frac{A_1 \cdot A_2}{l_1 \cdot A_2 + l_2 \cdot A_1} \cdot (\alpha \cdot \Delta t \cdot l - \delta) \cdot E \qquad 5.7.5\text{-}9$$

Secțiunea periculoasă este situată pe tronsonul cu aria mai mică (se presupune că acest material are şi tensiunea admisibilă cea mai mică). Condiția de rezistență care se impune şi de unde se scoate apoi Δt, este:

$$N = \frac{A_1 \cdot A_2}{l_1 \cdot A_2 + l_2 \cdot A_1} \cdot (\alpha \cdot \Delta t \cdot l) \cdot E = A_1 \cdot \sigma_{a1} \qquad 5.7.5\text{-}10$$

Rezolvând relația 5.7.5-10 în raport cu Δt, se obține diferența maximă de temperatură la care poate fi supus sistemul pentru a nu se depăşi tensiunea admisibilă:

$$\Delta t = \frac{A_1 \cdot \sigma_{a1}}{E \cdot \alpha} \cdot \frac{l_1 \cdot A_2 + l_2 \cdot A_1}{A_1 \cdot A_2} + \frac{\delta}{\alpha} \qquad 5.7.5\text{-}11$$

5.7.6 Bare supuse acțiunii mai multor factori

De foarte multe ori, se întâlnesc sisteme care sunt supuse simultan acțiunii mai multor factori: forțe exterioare, inexactități de execuție, variații de temperatură, etc. Rezolvarea unor astfel de sisteme poate fi făcută în două variante:

a) considerarea simultană a tuturor factorilor
b) evaluarea separată a eforturilor şi tensiunilor produse de fiecare factor de influență.

În prima variantă, ecuația care rezultă din condiția de deformare conține termeni care exprimă influența fiecărui factor. În acest fel, rezultatul care se obține este unul singur şi anume cel total (cel rezultant).

În varianta a doua, problema se rezolvă separat pentru fiecare factor de influență. Pentru obținerea rezultatului final (rezultant) trebuie făcută însumarea algebrică a rezultatelor obținute pentru fiecare factor. Această metodă, de cele mai multe ori este mai simplă şi mai comodă, dar în acelaşi timp, necesită un volum mare de muncă. Metoda aceasta, mai este cunoscută şi sub denumirea de *metoda suprapunerii efectelor.*

Studiul influenței mai multor factori asupra elementelor de rezistență, se face pe un caz concret.

Aplicație. *Fie trei bare verticale de lungime $l = 2$ m şi care susțin o platformă rigidă orizontală BC pe care se aplică o forță $F = 40$ KN (Fig.5.7.6-1a). Bara din mijloc este mai scurtă cu $\delta = 0,2$ mm. Bara 1 este din cupru, iar barele 2 şi 3 din oțel. Dacă temperatura sistemului creşte cu $\Delta t = 20^0$ C, se cere să se determine tensiunile din cele trei bare, după montarea forțată şi creşterea temperaturii cu Δt. Se mai cunosc: $a = 1,5$ m, $b = 1$ m, $c = 0,25$ m, $A_1 = 2A_2 = 200$ mm^2, $A_3 = 3A_2 = 300$ mm^2, $E_{Cu} = E_c = 10^5$ MPa, $E_{OL} = E_0 = 2\cdot10^5$ MPa, $\alpha_{Cu} = \alpha_c = 17\cdot10^{-6}$ grad^{-1}, $\alpha_{Ol} = \alpha_0 = 13\cdot10^{-6}$ grad^{-1}.*

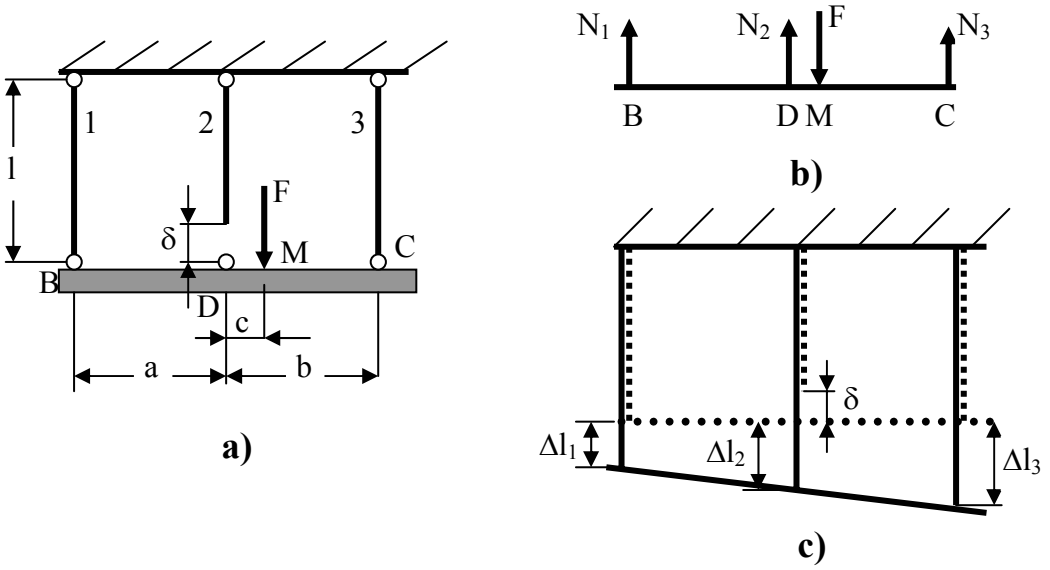


Fig.5.7.6-1

Presupunem că s-a realizat montarea forțată şi că eforturile axiale care apar în bare sunt toate de întindere. Se aplică varianta când se ține seamă de influența tuturor acțiunilor: forța F, inexactitatea de execuție, creşterea temperaturii. Eforturile din bare sunt evidențiate în Fig.5.7.6-1b. Tot pentru acest sistem simplificat se pun şi condițiile de echilibru:

$$\left(\sum F\right)_y = 0 \quad \Rightarrow \quad N_1 + N_2 + N_3 = F \qquad 5.7.6\text{-}1$$

$$\left(\sum M\right)_D = 0 \quad \Rightarrow \quad N_1 \cdot a - N_3 \cdot b = -F \cdot c \qquad 5.7.6\text{-}2$$

Deoarece nu se mai pot scrie alte ecuații de echilibru independente, se caută relații de deformații. Schema simplificată cu deformarea sistemului este prezentată în Fig.5.7.6-1c. După scrierea relației dintre deformațiile barelor şi efectuarea calculelor necesare, se ajunge la următoarea relație:

$$\frac{\Delta l_3 - \Delta l_1}{\Delta l_2 - \Delta l_1 - \delta} = \frac{a + b}{a} \qquad 5.7.6\text{-}3$$

unde:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 \cdot l}{E_c \cdot A_1} + \alpha_c \cdot l \cdot \Delta t \qquad 5.7.6\text{-}4a$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 \cdot l}{E_0 \cdot A_2} + \alpha_0 \cdot l \cdot \Delta t \qquad 5.7.6\text{-}4b$$

$$\Delta l_3 = \frac{N_3 \cdot l}{E_0 \cdot A_3} + \alpha_0 \cdot l \cdot \Delta t \qquad 5.7.6\text{-}4c$$

După înlocuirea relațiilor 5.7.6-4a...c în relația 5.7.6-3 şi rezolvarea sistemului format din ecuațiile 5.7.6-1, 5.7.6-2 şi 5.7.6-3 explicitată, se obțin pentru cele trei eforturi, valorile:

$N_1 =$ 7,92 KN
$N_2 =$ 10,20 KN
$N_3 =$ 21,88 KN.

Cu valorile eforturilor calculate, rezultă tensiunile din bare:

- pentru bara 1:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{7{,}92 \cdot 10^3}{200} = 39{,}6 \text{ MPa} < \sigma_{aCu}$$

- pentru bara 2:

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{10{,}2 \cdot 10^3}{100} = 10{,}2 \text{ MPa} < \sigma_{aOL}$$

- pentru bara 3:

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{A_3} = \frac{21{,}88 \cdot 10^3}{300} = 72{,}93 \text{ MPa} < \sigma_{aOL}$$

Se constată că în toate cele trei bare, tensiunile rezultate sunt mai mici decât valoarea tensiunilor admise pentru fiecare material. Toate barele satisfac condiția de rezistență.

6. FORFECAREA PIESELOR DE GROSIME MICĂ

6.1 TENSIUNI ŞI DEFORMAȚII LA FORFECARE

Dacă singurul efort din secțiunea transversală a unui element de rezistență este efortul tăietor T, se spune că în acea secțiune se realizează o solicitare de *forfecare pură.* O astfel de solicitare se întâlnește destul de rar în practică. Chiar şi în laborator, forfecarea pură se realizează numai cu dispozitive speciale. Forfecarea este însoțită în general de încovoiere şi strivire. În studiul care se va efectua în continuare, efectul încovoierii se neglijează.

Se consideră o bară dreaptă, de secțiune dreptunghiulară şi având grosimea mică, solicitată de două forțe exterioare egale, paralele şi de sens opus F. Forțele F sunt perpendiculare pe axa barei şi sunt situate la o distanță mică una de cealaltă (Fig.6.1-1a).

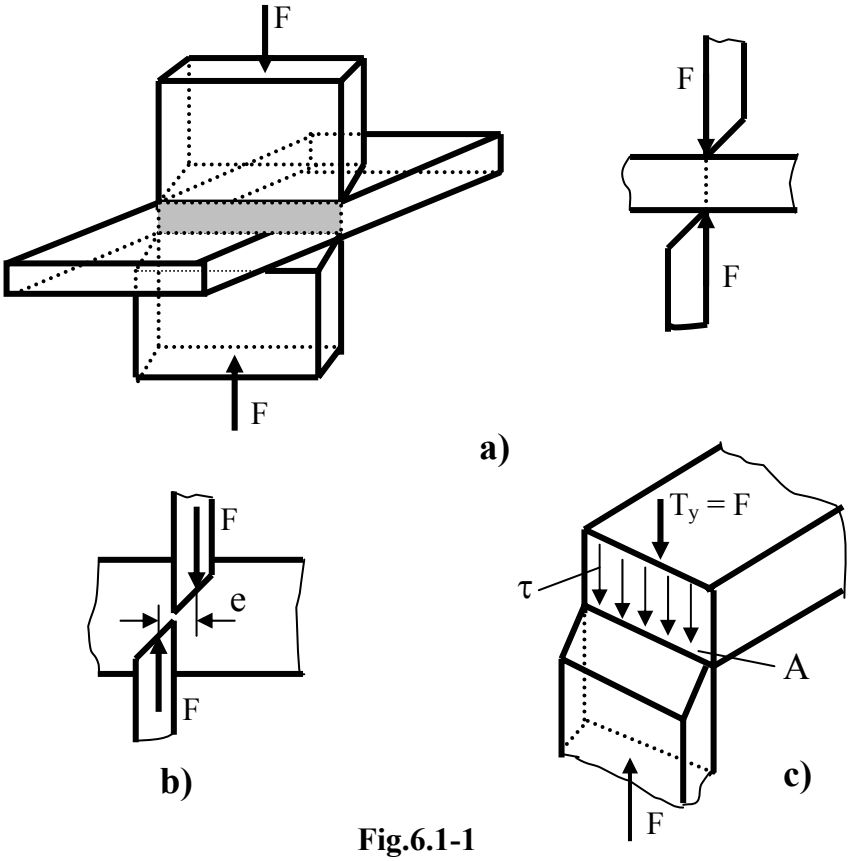


Fig.6.1-1

După ce cuțitele au pătruns în material, prin producerea unei compresiuni foarte mari care distruge materialul, între cele două *forțe de tăiere* sau de *forfecare*, apare o excentricitate *e* (Fig.6.1-1b), şi de aici un moment încovoietor:

$$M_i = F \cdot e \qquad 6.1\text{-}1$$

Aşadar, nu există o forfecare pură, ea fiind însoțită de încovoiere şi strivire. Convențional, se consideră că într-o astfel de secțiune, nu există decât efort tăietor.

Sub acțiunea forțelor exterioare, elementul se deformează, producându-se lunecări γ, iar în secțiunea transversală se dezvoltă tensiuni tangențiale τ. Calculul la forfecare al pieselor de grosime mică admite că pe secțiunea forfecată, tensiunea tangențială τ este uniform (Fig.6.1-1c).

Din cele şase relații de echivalență dintre eforturi şi tensiuni, în cazul forfecării, există una singură:

$$T = \int_A \tau \cdot dA = \tau \cdot \int_A dA = \tau \cdot A \qquad 6.1\text{-}2$$

de unde se poate determina valoarea tensiunii tangențiale τ:

$$\tau = \frac{T}{A} \qquad 6.1\text{-}3$$

Tensiunea tangențială τ este în general neuniformă pe secțiune şi determinarea exactă a acestei distribuții, este o problemă foarte dificilă. Însă, la piese de grosime mică, se poate considera o distribuție uniformă a tensiunii tangențiale τ.

Relația 6.1-3 de calcul a tensiunii tangențiale este o relație aproximativă care însă dă rezultate bune la calculul la forfecare al pieselor care apar la îmbinări cu nituri, buloane, şuruburi, pene, suduri, construcții din lemn, etc.

Calculul la forfecare, se face exclusiv din condiția de rezistență. Pentru cele trei tipuri de problemă, relațiile de calcul la forfecare sunt:

❖ *probleme de verificare*

$$\tau_{max} = \frac{T}{A_f} \le \tau_a \qquad 6.1\text{-}4$$

❖ *probleme de dimensionare*

$$A_{nec} = \frac{T}{\tau_a} \qquad 6.1\text{-}5$$

❖ *probleme de efort capabil*

$$T_{cap} = A_f \cdot \tau_a \qquad 6.1\text{-}6$$

În relațiile 6.1-4 şi 6.1-6, mărimea A_f se citeşte *aria de forfecare* sau *aria forfecată*, iar τ_a – tensiune tangențială admisibilă:

$$\tau_a = (0{,}6 \ldots 0{,}8)\ \sigma_a$$

Deformațiile produse la forfecare sunt nesemnificative şi fără importanță practică. Deformația la forfecare constă dintr-o deplasare relativă *v* a unei secțiuni față de alta situată la distanța *l*. Dacă solicitarea de forfecare are loc în domeniul valabilității legii lui Hooke, deplasarea *v* se poate calcula cu relația:

$$\nu = \gamma \cdot l = \frac{\tau}{G} \cdot l = \frac{T \cdot l}{G \cdot A} \qquad 6.1\text{-}7$$

unde

G – o constantă de material, numită *modul de elasticitate transversal*

τ – tensiune tangențială la forfecare:

Produsul GA de la numitorul relației 6.1-7 se numeşte *modul de rigiditate la forfecare* sau *rigiditatea* secțiunii la forfecare.

Materialele anizotrope au pe direcții diferite, module de elasticitate transversale diferite.

6.2 CALCULUL ÎMBINĂRILOR DE PIESE

Îmbinările dintre diferitele elemente ale unei structuri de rezistență, pot fi:

- *demontabile*, din care fac parte îmbinările cu şuruburi, cuie, buloane, chertări, etc
- *nedemontabile*, ca cele realizate prin nituire, sudare, încleiere, etc.

Elementele componente ale unei structuri, sunt solicitate în general la forfecare, întindere, compresiune sau uneori la strivire (care este tot o compresiune locală).

6.2.1 Calculul îmbinărilor nituite

Pentru realizarea unei îmbinări nituite între două platbande, se execută în cele două platbande găuri prin care se introduce tija nitului, prealabil încălzită până la roşu. Nitul are un singur cap, celălalt se realizează prin baterea extremității tijei cu ajutorul unui ciocan special sau cu ajutorul unei prese special realizată în acest scop.
Fie două platbande îmbinate prin intermediul a două nituri ca în Fig.6.2.1-1a.

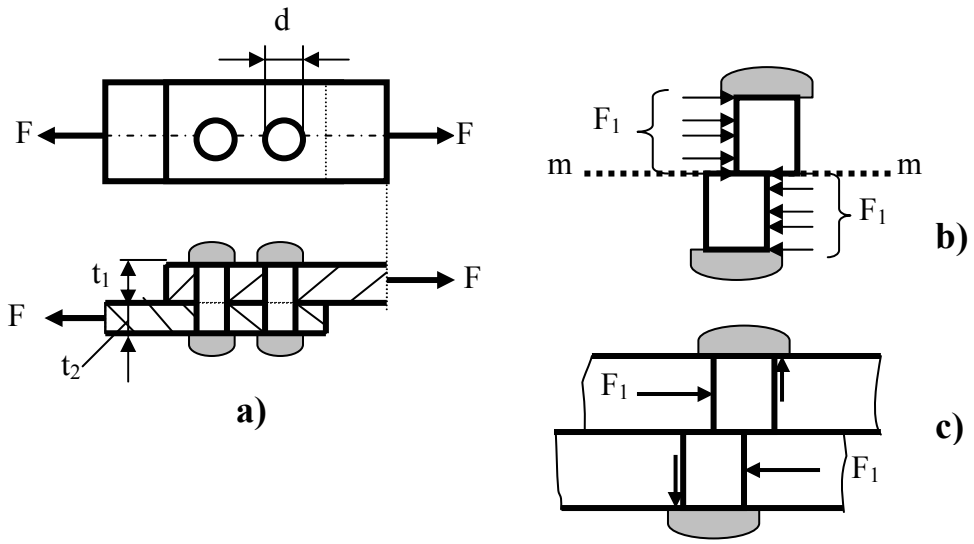


Fig.6.2.1-1

Sub acțiunea forțelor F, platbandele tind să lunece una față de alta, iar niturile împiedică această lunecare şi preiau acțiunea forțelor F.

La fiecare nit, se transmit prin platbande, câte două forțe egale şi de semn contrar. Cercetările experimentale au scos în evidență faptul că fie şi în acelaşi rând, niturile se încarcă în mod diferit, unele mai mult, altele mai puțin. Până în momentul ruperii, datorită deformațiilor plastice, eforturile care se transmit la nituri se uniformizează. Din acest motiv, se poate considera că toate niturile se comportă la fel.

În cazul mai multor nituri, asupra unui singur nit, acționează câte două forțe egale şi de sens contrar, numită *forța pe nit* (Fig.6.2.1-1b):

$$F_1 = \frac{F}{n} \qquad 6.2.1\text{-}1$$

unde, *n* reprezintă numărul de nituri care preiau forța F. Forța pe nit se transmite la nit datorită presiunii exercitate de platbandă pe suprafața laterală semicilindrică a tijei nitului. Forța pe nit F_1 tinde să *foarfece* nitul după planul *m-m* de separație al celor două platbande.

Pentru determinarea tensiunilor din tija nitului, se secționează tija acestuia la nivelul planului *m-m* şi se elimină partea inferioară (Fig.6.2.1-1b). Eforturile care se transmit prin secțiunea tijei nitului de la partea inferioară la cea superioară, echilibrează forța F_1, adică acționează paralel cu aceasta în planul secțiunii şi prin însumare dau o rezultantă egală cu F_1. Tensiunile care apar în această secțiune şi care acționează tangent la planul secțiunii, sunt *tensiuni tangențiale* τ. La nituri care fac parte din categoria pieselor de grosime mică, se consideră că *tensiunea tangențială* τ *este uniform distribuită pe secțiune*.

Tensiunea tangențială τ din secțiunea transversală a unui nit dintr-o îmbinare cu *n* nituri, se calculează cu relația:

$$\tau = \frac{F_1}{\frac{\pi \cdot d^2}{4}} = \frac{F}{n \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4}} \leq \tau_a \qquad 6.2.1\text{-}2$$

care reprezintă şi relația de verificare a condiției de rezistență.

Dimensionarea unei îmbinări nituite, necesită determinarea diametrului nitului. Din relația 6.2.1-2 rezultă expresia pentru diametrul necesar al unui nit, atunci când se cunoaşte numărul de nituri din îmbinare:

$$d = \sqrt{\frac{4 \cdot F}{n \cdot \pi \cdot \tau_a}} \qquad 6.2.1\text{-}3$$

În general, diametrul tijei niturilor, se alege în funcție de grosimea *t* a pieselor care se îmbină (în mod obişnuit d = 2t). În aceste situații, se calculează atunci numărul de nituri necesar îmbinării pentru transmiterea forțelor exterioare:

$$n \geq \frac{F}{\frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot \tau_a} \qquad 6.2.1\text{-}4$$

Forța capabilă a unei îmbinări nituite se determină cu relația:

$$F_{cap} = n \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot \tau_a \qquad 6.2.1\text{-}5$$

La calculele prezentate până acum s-a neglijat faptul că forțele de forfecare F_1 nu sunt dirijate pe aceeaşi dreaptă, ci ele formează un cuplu. Acest

cuplu este însă echilibrat de celălalt cuplu care este format de reacțiunile exercitate de platbande asupra capului nitului (Fig.6.2.1-1c) şi conduce la apariția unor tensiuni normale, care acționează în secțiunea *m-m*.

În tija nitului mai apar tensiuni normale şi datorită faptului că prin răcire, tija nitului tinde să se scurteze fiind împiedicată de capetele nitului, care sunt presate pe platbande. Acest fenomen asigură pe de-o parte, strângerea platbandelor cu ajutorul niturilor şi apariția între ele a unor forțe de frecare, iar pe de altă parte, conduce la apariția tensiunilor normale mari în tija nitului. Tensiunile normale din tija nitului nu pot provoca inconveniente deosebite şi ca urmare, acestea se neglijează în calcule.

Deoarece transmiterea forțelor la nit se realizează prin presarea dintre pereții găurii şi tija nitului, este necesar a se cunoaşte dacă nu se produce o strivire a tijei sau a pereților găurii platbandei. Această verificare este o verificare la *strivire* sau la *presiunea pe gaură.*

Modul de transmitere a presiunii (tensiunii) pe tija nitului este arătată în Fig.6.2.1-2a. Legea de distribuție a presiunii pe suprafața semicilindrică a tijei nitului, nu este cunoscută, ea depinzând de neregularitățile formei găurii şi ale tijei nitului, funcție de modul de execuție a acestora. Din acest motiv, calculul la strivire este un calcul convențional, admițându-se că presiunea neuniformă care se transmite la suprafața tijei nitului de la platbandă, este *uniform repartizată pe planul diametral al secțiunii tijei nitului* (Fig.6.2.1-2b).

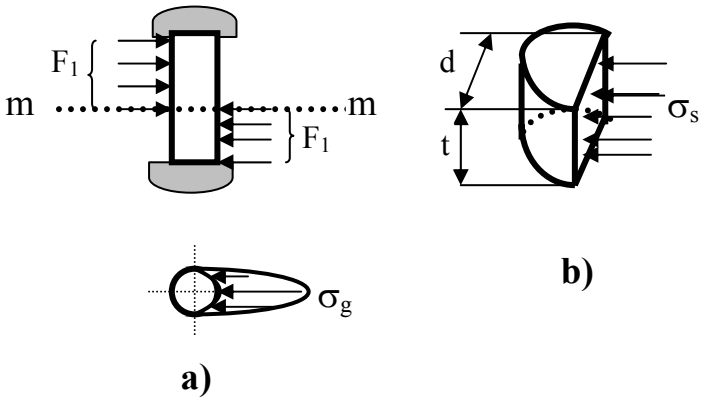


Fig.6.2.1-2

Tensiunea σ_s pe acest plan diametral este aproximativ egală cu tensiunea maximă la presiunea pe gaură σ_g.

Pentru a calcula această tensiune de strivire convențională σ_s, este necesar ca forța ce revine nitului F_1, să se împartă la aria secțiunii diametrale (Fig.6.2.1-2b). Această suprafață diametrală este un dreptunghi, care are ca laturi diametrul nitului *d* şi grosimea platbandei *t*, care transmite presiunea pe tija nitului.

Pentru o îmbinare cu *n* nituri, relația de verificare la strivire, are forma:

$$\sigma_{max,s} = \sigma_s = \frac{F_1}{d \cdot t} = \frac{F}{n \cdot d \cdot t} \leq \sigma_{as} \qquad 6.2.1\text{-}6$$

unde,

σ_{as} – tensiunea admisibilă la strivire

$\sigma_{as} = (2 \ldots 2{,}5)\ \sigma_a$

Pe baza relației 6.2.1-6, se calculează numărul de nituri necesar pentru satisfacerea condiției de rezistență la strivire:

$$n \geq \frac{F}{d \cdot t \cdot \sigma_{as}} \qquad 6.2.1\text{-}7$$

Din cele prezentate până acum cu privire la calculul niturilor, reiese faptul că nitul trebuie calculat atât la solicitarea de forfecare cât şi la cea de strivire. Pentru problemele de dimensionare sau de calcul al numărului de nituri necesar, rezultă două valori pentru aceeaşi mărime. În această situație, se va lua valoarea cea mai mare rezultată.

În general, rezistența niturilor este mai mică la solicitarea de forfecare. Acest lucru se întâmplă la aşa numitele nituri cu *o singură secțiune de forfecare*, la care fiecare nit este forfecat într-o singură secțiune.

În cazul îmbinărilor nituite între două platbande prin intermediul ecliselor, forța F se transmite de la o platbandă prin cele două eclise la cealaltă platbandă (Fig.6.2.1-3).

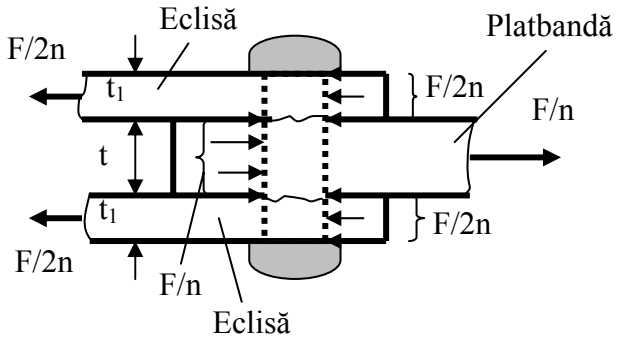


Fig.6.2.1-3

Dacă se notează cu *n* numărul niturilor care transmit forța F de la platbandă la eclise şi de la eclise mai departe la cealaltă platbandă, rezultă că fiecărui nit îi revine să preia de la platbandă sarcina *F/n*. În acelaşi timp, prin eclise, nitul preia sarcina *F/2n*. Tija nitului prezintă la o astfel de îmbinare, două secțiuni de

forfecare, deoarece platbanda tinde să lunece față de ambele eclise. În cazul prezentat în Fig.6.2.1-3, lunecarea platbandei are loc spre dreapta. Pe cele două suprafețe de forfecare, se presupune că efortul tăietor *F/n* se repartizează în mod egal.

Tensiunea tangențială la forfecarea tijei nitului, este:

$$\tau = \frac{F_1}{2 \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4}} = \frac{F}{n \cdot 2 \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4}} = \frac{F}{n \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{2}} \qquad 6.2.1\text{-}8$$

Condiția de verificare la forfecare pentru nitul cu două secțiuni de forfecare, este:

$$\tau = \frac{F}{n \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{2}} \leq \tau_a \qquad 6.2.1\text{-}9$$

iar numărul de nituri necesare, se calculează cu relația:

$$n \geq \frac{F}{\frac{\pi \cdot d^2}{2} \cdot \tau_a} \qquad 6.2.1\text{-}10$$

Se poate constata că, în cazul niturilor cu două suprafețe de forfecare, numărul acestora este redus la jumătate, față de cazul niturilor cu o singură suprafață de forfecare.

Grosimea platbandelor este *t*, iar a ecliselor t_1 (Fig.6.2.1-3). Grosimea ecliselor trebuie să fie de cel puțin 0,5*t*, deoarece preia fiecare jumătate din forța preluată de o platbandă. Din acest motiv,

$$0{,}5\ t < t_1 \leq t \qquad 6.2.1\text{-}11$$

Forța *F/n* strivește atât porțiunea de mijloc a nitului cât şi porțiunea de sus şi de jos a acestuia. Mai periculoasă este acea porțiune care are suprafața de strivire mai mică, adică cea cu grosimea mai mică. Deoarece grosimea platbandei nu depăşeşte suma grosimilor celor două eclise, rezultă că mai periculoasă este platbanda. Dacă suma grosimilor celor două eclise este mai mică decât grosimea platbandei, atunci eclisele sunt cele mai periculoase.

Rezultă că relația de verificare la strivire, în acest caz, este de forma:

- *pentru platbandă - nit*

$$\frac{F}{n \cdot d \cdot t} \le \sigma_{as} \quad ; \quad n \ge \frac{F}{d \cdot t \cdot \sigma_{as}} \qquad 6.2.1\text{-}12$$

➢ *pentru eclisă – nit*

$$\frac{F}{2 \cdot n \cdot d \cdot t_1} \le \sigma_{as} \quad ; \quad n \ge \frac{F}{2 \cdot d \cdot t_1 \cdot \sigma_{as}} \qquad 6.2.1\text{-}13$$

Dacă nitul, platbandele şi eclisele nu sunt realizate din acelaşi material, atunci în relațiile 6.2.1-12 şi 6.2.1-13 se ia tensiunea admisibilă la strivire cea mai mică (a materialului cu rezistența la strivire cea mai mică).

În concluzie, pentru calculul tensiunii tangențiale, forța care revine unui nit, trebuie împărțită la aria totală de forfecare care preia această forță. La strivire însă, trebuie stabilită acea parte a nitului care se află în condițiile cele mai periculoase, adică preia forța cea mai mare pe o suprafață minimă. Tensiunea maximă la strivire rezultă prin împărțirea acestei forțe la aria secțiunii diametrale a porțiunii celei mai solicitate a nitului.

Platbandele şi eclisele sunt solicitate la întindere sau compresiune. Secțiunea periculoasă a fiecăreia, este secțiunea care trece prin găurile de nit, unde lățimea efectivă este mai mică. În practică se spune că această secțiune este *slăbită* de gaura de nit.

Fie îmbinarea nituită din Fig.6.2.1-4a, la care platbandele au lățimea totală *b*. Sunt 6 nituri, câte două pe un rând transversal.
Forța ce revine unui singur nit este:

$$F_1 = \frac{F}{6} \qquad 6.2.1\text{-}14$$

şi ea se transmite prin nit de la o platbandă la alta. Nu toate secțiunile transversale ale platbandelor, cu toate că sunt slăbite de acelaşi număr de găuri, sunt la fel de periculoase. Aceasta din cauză că efortul axial din platbandă nu este acelaşi pe toată lungimea ei. Diferența de efort axial de la o secțiune la alta, este cauzată de faptul că prin fiecare nit se transmite forța F_1, ceea ce face ca la secțiunile următoare, forța care rămâne să fie din ce în ce mai mică. Acest fenomen este explicitat mai bine în Fig.6.2.1-4b, unde este reprezentată variația efortului axial în lungul platbandei. Efortul axial N mai mare şi egal cu forța de solicitare F, este pentru fiecare platbandă în porțiunea cuprinsă între secțiunea de aplicare a forței F şi secțiunea cu primul rând de nituri.

Trebuie avut în vedere şi faptul că aceste găuri de nit constituie concentratori de tensiune, ceea ce face ca tensiunile din vecinătatea găurii să fie considerabil mai mari decât cea determinată prin calcul.

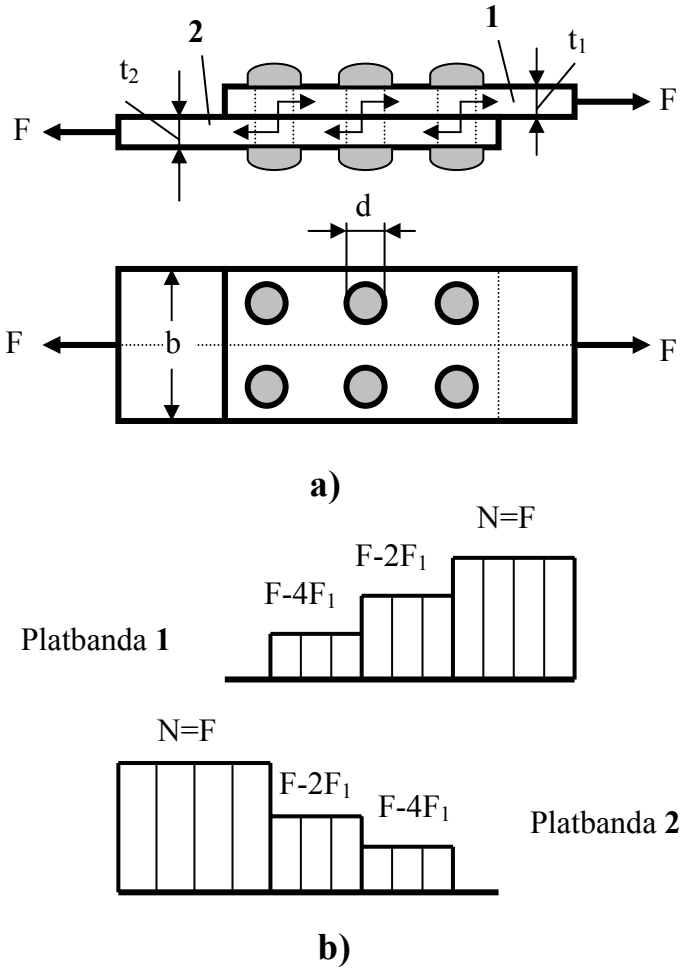


Fig.6.2.1-4

Pentru exemplul prezentat, rezultă că tensiunea maximă din platbandă este:

$$\sigma_{max} = \frac{F}{(b - 2d) \cdot t} \qquad 6.2.1\text{-}15$$

sau pentru cazul general:

$$\sigma = \frac{F}{(b - m \cdot d) \cdot t} \qquad 6.2.1\text{-}16$$

unde, *m* – numărul de nituri pe un rând transversal.

În general, deoarece platbanda este mai solicitată la primul rând de nituri, în această secțiune se aşează mai puține nituri pe un rând. Dacă nu se întâmplă aşa, atunci funcție de numărul niturilor pe un rând şi a valorii efortului axial, se

stabileşte secţiunea periculoasă pentru platbandă şi calculul se efectuează în această secţiune.

La calculul la întindere sau compresiune al unei eclise, trebuie avut în vedere faptul că în eclisă efortul axial are valoarea cea mai mare şi egală cu $F_1/2$, la nivelul primului rând de nituri prin care se transmite forţa de la eclisă la platbandă.

6.2.2 Calculul îmbinărilor sudate

La îmbinarea diferitelor elemente ale structurilor de rezistenţă se utilizează pe scară mare sudura. Îmbinarea prin sudare prezintă o serie de avantaje faţă de îmbinarea nituită: manoperă scăzută, elementele nu sunt slăbite prin efectuarea găurilor de nit, preţ de cost redus, consum redus de metal etc.

Calculul îmbinărilor sudate ca şi al celor nituite de altfel, se face convenţional, considerându-se că tensiunile sunt distribuite uniform în secţiunile respective.

Cea mai simplă şi sigură în acelaşi timp, este *îmbinarea cap la cap.* Acest tip de îmbinare constă în umplerea cu metal topit a spaţiului (rostului) dintre extremităţile elementelor care se îmbină (Fig.6.2.2-1).

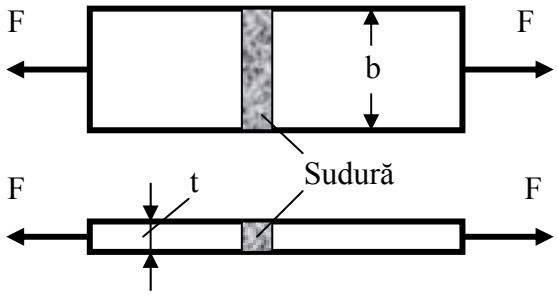


Fig.6.2.2-1

Grosimea cordonului de sudură depinde de grosimea elementelor care se îmbină. Se cunosc mai multe procedee de realizare a cordonului de sudură, care nu fac obiectul de studiu al Rezistenţei Materialelor.

Deoarece calculul îmbinărilor sudate este un calcul convenţional, trebuie văzut care sunt elementele constitutive ale unui cordon de sudură. Elementele constitutive şi cele de calcul ale unui cordon de sudură sunt prezentate în Fig.6.2.2-2.

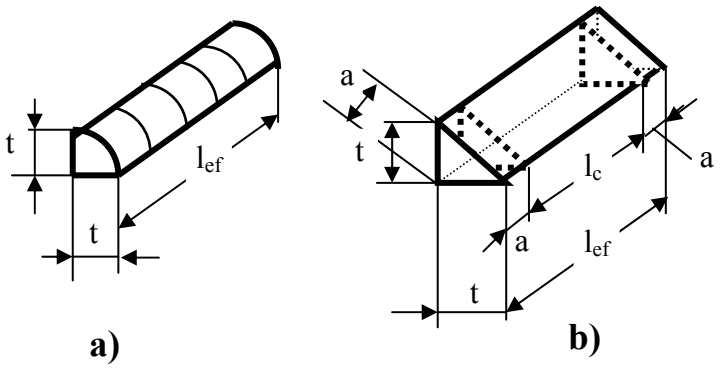


Fig.6.2.2-2

Un cordon de sudură trebuie să arate ca în Fig.6.2.2-2a, unde:

t – este lățimea cordonului de sudură

l_{ef} – lungimea efectivă a cordonului de sudură.

După cum rezultă din Fig.6.2.2-2a, în secțiune transversală cordonul are un bombeu, care de multe ori din cauza superficialității sudorului, acesta lipseşte. Ca urmare, se consideră că în secțiune transversală cordonul de sudură are forma unui triunghi isoscel (Fig.6.2.2-2b) unde a = 0,7t şi reprezintă *înălțimea* cordonului de sudură. Se mai ştie că la capetele unui cordon de sudură datorită curgerii metalului de adaos sau datorită amorsării greoaie uneori a procesului de sudare, nu se asigură pentru cordon înălțimea necesară. Din acest motiv, la fiecare cordon de sudură, la capete nu se ia în considerare o lungime egală cu înălțimea cordonului, rezultând aşa numita *lungime de calcul* l_c (Fig.6.2.2-1b*):*

$$l_c = l_{ef} - 2a \qquad 6.2.2\text{-}1$$

Revenind la sudura cap la cap (Fig.6.2.2-1), aceasta este solicitată la întindere. Condiția de rezistență pe care trebuie să o satisfacă cordonul de sudură este:

$$\sigma_s = \frac{F}{A_c} = \frac{F}{(b-2a)\cdot t} = \frac{F}{(b-2t)\cdot t} \le \sigma_{aS} \qquad 6.2.2\text{-}2$$

unde: A_c este *aria de calcul.*

σ_{aS} – tensiunea admisibilă la tracțiune a materialului cordonului de sudură.

La acest tip de îmbinare (cap la cap) înălțimea cordonului de sudură este egală cu grosimea plăcilor care se îmbină (a = t). Pentru determinarea ariei de calcul, din lungimea efectivă a cordonului de sudură care este egală cu lățimea plăcilor (l_{ef} = b), s-a scăzut dimensiunea *2a*, deoarece se consideră că la margini cordonul de sudură nu mai are înălțimea corespunzătoare.

De multe ori în practică, îmbinarea elementelor se face prin suprapunere, sau cap la cap, dar cu ajutorul ecliselor. În acest caz, elementele nu se mai află în acelaşi plan, ceea ce conduce la realizarea unor *cordoane de colț*, care pot fi: *frontale* sau transversale când sunt perpendiculare pe direcția de acțiune a forței (Fig.6.2.2-3b) şi *laterale* când sunt paralele cu direcția forței (Fig.6.2.2-3a).

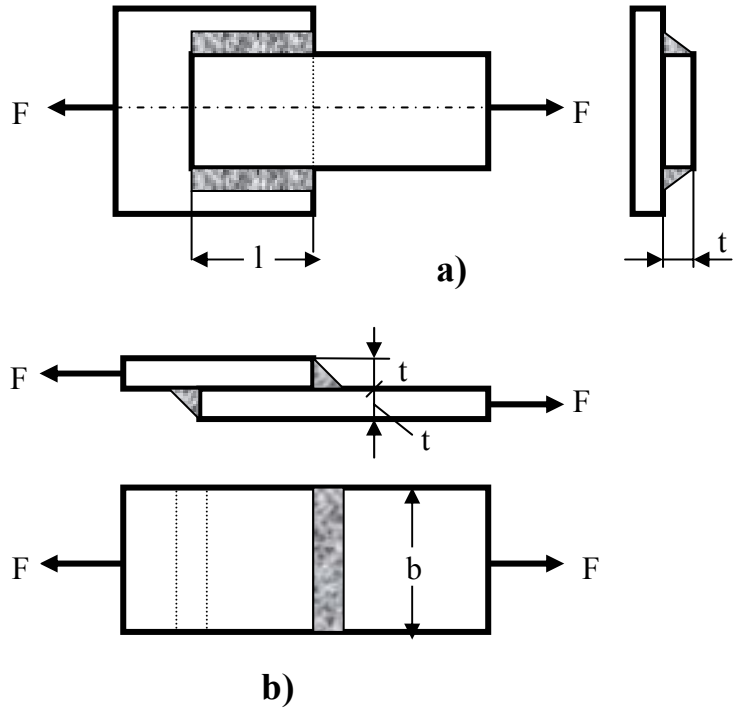


Fig.6.2.2-3

Elementele unui cordon de colț au fost prezentate în Fig.6.2.2-2. Ruperea cordoanelor de colț are loc într-un plan la 45^0 față de lățimea cordonului sau altfel, în planul care conține înălțimea triunghiului isoscel al secțiunii transversale a cordonului. La cordoanele frontale, tensiunea care ia naştere, se poate descompune în două componente: *o tensiune normală* şi alta *tangențială* în lungul cordonului de sudură. Deoarece la materialul de adaos, rezistența la lunecare este mai mică decât cea la întindere şi cordonul frontal se calculează tot la forfecare ca şi cel lateral.

Pentru îmbinarea cu cordoane laterale din Fig.6.2.2-3a, tensiunea tangențială la forfecare este:

$$\tau = \frac{F}{2\cdot(l-2a)\cdot a} = \frac{F}{2\cdot(l-2\cdot 0{,}7\cdot t)\cdot 0{,}7\cdot t} \le \tau_{aS} \qquad 6.2.2\text{-}3$$

iar pentru îmbinarea frontală din Fig.6.3-3b, este:

$$\tau = \frac{F}{2\cdot(b-2a)\cdot a} = \frac{F}{2\cdot(b-2\cdot 0{,}7\cdot t)\cdot 0{,}7\cdot t} \le \tau_{aS} \qquad 6.2.2\text{-}4$$

În relațiile 6.2.2-3 şi 6.2.2-4, τ_{aS} este tensiunea admisibilă la forfecare a materialului cordonului de sudură, iar la numitor apare factorul 2, deoarece în ambele cazuri există două cordoane de sudură.

Deoarece tensiunea admisibilă la întindere pentru materialul cordonului de sudură este mai mică decât a materialului pieselor care se îmbină cap la cap, se caută mărirea lungimii cordonului de sudură. Pentru aceasta, se utilizează îmbinarea cap la cap cu cordon oblic (Fig.6.2.2-4a).

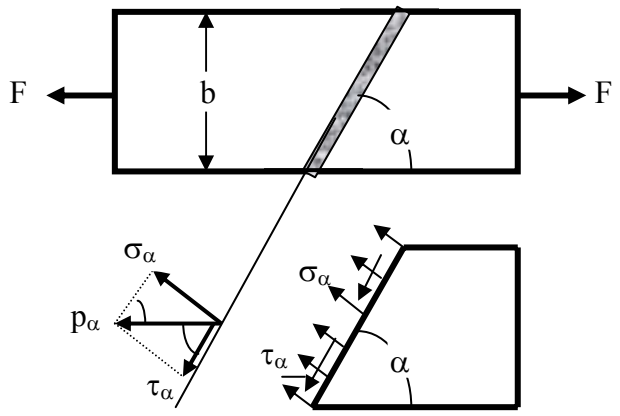


Fig.6.2.2-4

Cercetările experimentale au relevat faptul că rezistența unor astfel de îmbinări este egală cu cea a materialului de bază. Într-un cordon oblic, iau naştere atât tensiuni normale cât şi tangențiale, a căror expresie este:

$$\sigma_\alpha = p_\alpha \cdot \sin\alpha = \frac{F}{A_\alpha}\cdot\sin\alpha = \frac{F}{t\cdot l_c}\cdot\sin\alpha$$
$$\tau_\alpha = p_\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{F}{A_\alpha}\cdot\cos\alpha = \frac{F}{t\cdot l_c}\cdot\cos\alpha \qquad 6.2.2\text{-}5$$

unde

l_c – este lungimea de calcul a cordonului de sudură şi are convențional expresia:

$$l_c = \frac{b}{\sin\alpha} - 10 \qquad 6.2.2\text{-}6$$

Mărimea cea mai rațională pentru unghiul de înclinare α al cordonului de sudură față de direcția de solicitare este de 45^0 ... 50^0. Îmbinarea cu cordon de sudură înclinat are dezavantajul că centrarea elementelor care trebuie îmbinate este destul de dificil de realizat.

Există situații destul de întâlnite în care direcția forței de solicitare nu este axă de simetrie pentru elementele care se îmbină sau pentru aşezarea cordoanelor de sudură. În aceste situații problema mai dificilă este aceea de a determina efortul din fiecare cordon. Problema determinării eforturilor din cordoanele de sudură se rezolvă însă cu metodele cunoscute din statică.

6.3 CALCULUL ÎMBINĂRILOR DE PIESE DIN LEMN

Tensiunile de întindere-compresiune, forfecare şi strivire se întâlnesc şi în cazul îmbinărilor de piese din lemn. Lemnul este un material neomogen şi ca urmare prezintă rezistențe diferite funcție de direcția pe care o au fibrele față de cea de solicitare.

Din punct de vedere al forfecării şi strivirii, se disting rezistențe diferite când solicitarea este paralelă cu fibrele şi când aceasta are loc perpendicular pe direcția fibrelor.

În Tabelul 6.3-1 se prezintă rezistența de rupere la forfecare pentru două sortimente de lemn, iar în Tabelul 6.3-2, rezistențele admisibile pentru aceleaşi sortimente, funcție de direcția solicitării cu direcția fibrelor.

Tabelul 6.3-1 Rezistența de rupere la forfecare [MPa]

Specia	**Direcția de solicitare față de a fibrelor**	
	Paralelă cu fibrele	**Perpendiculară pe fibre**
Pin	6	3
Stejar	9	-

Cele mai întâlnite îmbinări în lemn, sunt:

- *îmbinări prin chertare* cu prag sau cu mai multe praguri (Fig.6.3-1a)
- *îmbinări cu pene* (Fig.6.3-1b)
- *îmbinări cu elemente de legătură* din oțel: cuie, buloane, eclise, scoabe, tije, etc. (Fig.6.3-1c)
- *îmbinări prin încleiere.*

Tabelul 6.3-2 Tensiuni admisibile pentru pin şi stejar [MPa]

Felul solicitării	Notația	Pin	Stejar
Întindere	σ_a	10	13
Compresiune paralel cu fibrele şi strivirea capetelor	σ_{ac}	12	15
Strivire în îmbinări paralel cu fibrele	$\sigma_{a\ str}$	8	11
Strivire normală pe fibre (pe o lungime >10 cm)	$\sigma_{a\ str\ 90^0}$	2,4	4,8
Forfecare în paralel cu fibrele	τ_a	0,5 ... 1	0,8 ... 1,4
Forfecare în îmbinări normal pe fibre	$\tau_{a\ 90^0}$	0,6	0,8
Încovoiere	σ_i	12	15
Forfecare din încovoiere	τ_i	2	2,8

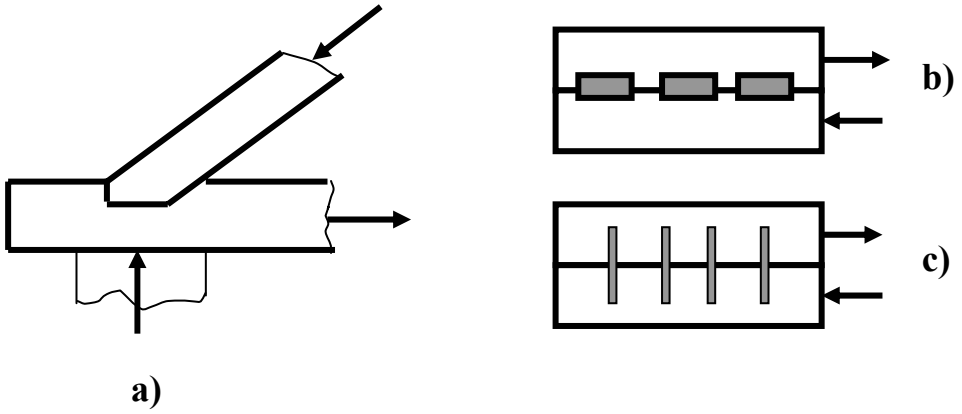


Fig.6.3-1

Abaterile tensiunii admisibile față de valorile prezentate în Tabelul 6.3-2 pot fi în limitele a 25...30 % şi ele depind de calitatea lemnului, gradul de umiditate, condițiile de solicitare etc. În cazul solicitării sub un unghi α față de direcția fibrelor (ca în cazul îmbinării prin chertare), tensiunea admisibilă are o valoare intermediară între $\sigma_{a\ str}$ şi $\sigma_{a\ str\ 90^0}$ (sau τ_a şi $\tau_{a\ 90^0}$) şi se calculează cu relația convențională:

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_{a\ str}}{1 + \left[\dfrac{\sigma_{a\ str}}{\sigma_{a\ str\ 90^0}} - 1\right] \cdot \sin^2 \alpha} \qquad 6.3\text{-}1$$

Când forțele de forfecare acționează într-un plan tangențial înclinat sub un unghi α față de direcția fibrelor, tensiunea admisibilă se calculează cu ajutorul aceleiaşi relații (relația 6.3-1) în care $\sigma_{a\ str}$ se înlocuieşte cu τ_a.

Îmbinările prin chertare, transmit sarcinile de la o piesă la alta în mod direct, prin intermediul unui prag, fără alte corpuri intermediare. Eventualele legături suplimentare, cum sunt buloanele, scoabele, etc., nu constituie elemente de rezistență şi ele nu preiau forțe din îmbinare.

Pentru îmbinarea prin chertare din Fig.6.3-2, tensiunile din secțiunile periculoase sunt:

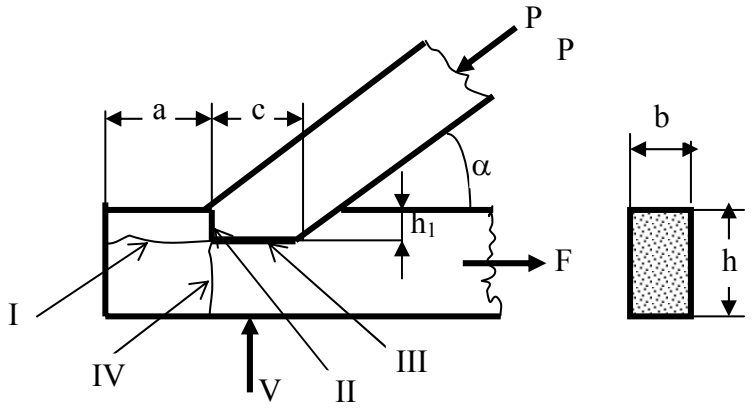


Fig.6.3-2

- *Secțiunea I* este solicitată la forfecare în lungul fibrelor:

$$\tau = \frac{P \cdot \cos\alpha}{a \cdot b} = \frac{F}{a \cdot b} \qquad 6.3\text{-}2$$

- *Secțiunea II* este solicitată la strivire

$$\sigma_s = \frac{P \cdot \cos\alpha}{b \cdot h_1} = \frac{F}{b \cdot h_1} \qquad 6.3\text{-}3$$

- *Secțiunea III* este solicitată la strivire, perpendicular pe fibre:

$$\sigma_s = \frac{P \cdot \sin\alpha}{b \cdot c} \qquad 6.3\text{-}4$$

- *Secțiunea IV* este solicitată la întindere

$$\sigma \approx \frac{F}{(h - h_1) \cdot b} \qquad 6.3\text{-}5$$

Aici s-a neglijat faptul că direcția forței F nu coincide (datorită chertării h_1) cu cea corespunzătoare centrului de greutate a secțiunii slăbite *IV*, existând o mică excentricitate.

În cazul unei îmbinări prin pene (Fig.6.3-3), tensiunile care apar într-o singură pană, sunt:

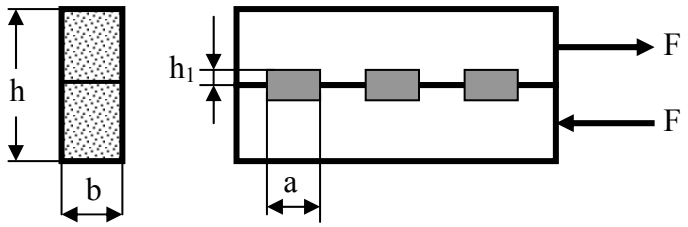


Fig.6.3-3

➢ *tensiuni de forfecare*

$$\tau = \frac{F}{m \cdot b \cdot a} \qquad 6.3\text{-}6$$

➢ *tensiuni de strivire*

$$\sigma_s = \frac{F}{m \cdot b \cdot h_1} \qquad 6.3\text{-}7$$

În relațiile 6.3-6 şi 6.3-7, multiplicatorul *m* reprezintă numărul penelor care preiau forța F.

6.4 APLICAȚII LA CALCULUL ÎMBINĂRILOR DE PIESE

6.4.1 *Să se dimensioneze elementele din oțel ale ansamblului din Fig.6.4.1-1, pentru care se cunosc: F = 150 KN, h = 5b,* σ_a *= 150 MPa,* $\tau_a = \tau_{aS}$ *= 100 MPa,* σ_{as} *= 300 MPa.*

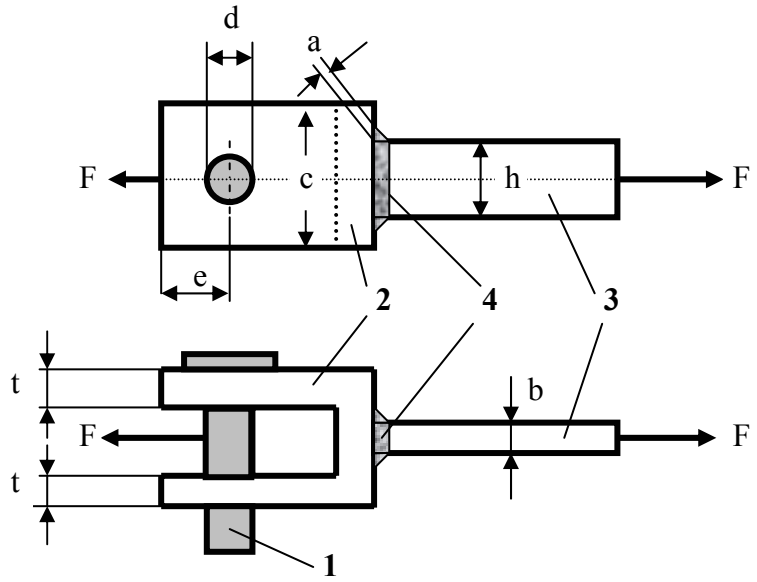


Fig.6.4.1-1

În acest ansamblu, există 4 elemente (notate în Fig.6.4.1-1) care trebuie dimensionate: bolțul (1), urechea (2), tija (3) şi sudura (4). Se va pune condiția de rezistență, pe rând pentru fiecare element component.

Bolțul (elementul 1):

- solicitat la forfecare în două secțiuni, de către ureche

$$2 \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4} = \frac{F}{\tau_a} \quad \Rightarrow d = \sqrt{\frac{2 \cdot F}{\pi \cdot \tau_a}} = 31 \text{ mm}$$

- solicitat la strivire, la suprafața de contact cu urechea

$$2 \cdot d \cdot t = \frac{F}{\sigma_{as}} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{F}{2 \cdot d \cdot \sigma_{as}} = 9 \text{ mm}$$

Urechea (elementul 2):

- solicitată la întindere, cu secțiunea periculoasă în zona slăbită de gaura pentru bolț

$$2\cdot(c-d)=\frac{F}{\sigma_a} \quad\Rightarrow\quad c=\frac{F}{2\cdot\sigma_a}+d=93\ \text{mm}$$

- solicitată la strivire, pe suprafața de contact cu bolțul. Fiind din acelaşi material cu bolțul şi aceeaşi suprafață de contact, nu mai este nevoie de calculul la strivire al urechii
- solicitată la forfecare de către bolț

$$4\cdot e\cdot t=\frac{F}{\tau_a} \quad\Rightarrow\quad e=\frac{F}{4\cdot t\cdot\tau_a}=42\ \text{mm}$$

Tija (elementul 3):

- solicitată la întindere

$$b\cdot h=\frac{F}{\sigma_a} \quad\Rightarrow\ b\cdot 5b=\frac{F}{\sigma_a} \quad\Rightarrow\quad b=\sqrt{\frac{F}{5\cdot\sigma_a}}=15\ \text{mm}$$

$$\Rightarrow\quad b=15\ \text{mm},\quad h=75\ \text{mm}$$

Sudura (elementul 4)

- este solicitată la forfecare. Cum sudura este realizată pe întreg conturul, nu există capete imperfect realizate

$$(2\cdot b+2\cdot h)\cdot a=\frac{F}{\tau_a} \quad\Rightarrow\quad 12b\cdot a=\frac{F}{\tau_a} \quad\Rightarrow\quad a=\frac{F}{12\cdot b\cdot\tau_a}=9\ \text{mm}$$

6.4.2 *Să se verifice elementele îmbinării din Fig.6.4.2-1 realizate din acelaşi material, pentru care se cunosc: F = 40 KN, d = 10 mm, b = 40 mm, t = 10 mm,* σ_a *= 160 MPa,* τ_a *= 130 MPa,* σ_{as} *= 240 MPa.*

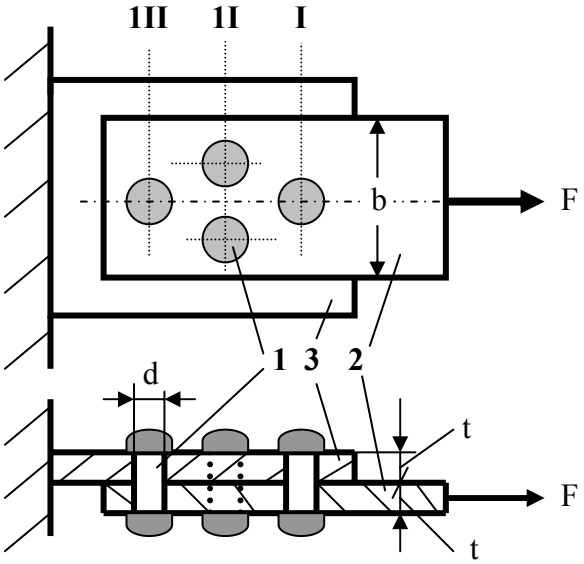


Fig.6.4.2-1

Elementul 3 având aceeaşi grosime *t* ca şi elementul 2, dar o lățime mai mare, este mai puțin periculos decât elementul 2 şi ca urmare nu i se mai face calculul de verificare.

Se vor verifica numai cele două elemente: nitul (1) şi placa (2).

Nitul (elementul 1):

- este solicitat la forfecare, având o singură suprafață de forfecare. Mai întâi se calculează forța pe un nit, îmbinarea realizându-se cu 4 nituri:

$$F_{nit} = F_1 = \frac{F}{n} = \frac{F}{4} = 10 \ \text{KN}$$

Tensiunea maximă de forfecare în tija nitului este:

$$\tau = \frac{F_1}{\frac{\pi \cdot d^2}{4}} = \frac{4 \cdot F_1}{\pi \cdot d^2} = 127 \ \text{MPa} < \tau_a$$

- este solicitat la strivire, pe suprafața de contact dintre tija nitului şi placă

$$\sigma_s = \frac{F_1}{d \cdot t} = 100 \text{ MPa} < \sigma_{as}$$

Placa (elementul 2)

- este solicitată la întindere. În secțiunea I, efortul axial este mai mare (cel mai mare) decât în secțiunea II, dar şi aria secțiunii I este mai mare decât aria secțiunii II (aici sunt două găuri de nit pe un rând). Ca urmare, stabilirea tensiunii maxime (a secțiunii periculoase) se poate face numai prin calcul. Se face atunci verificarea în ambele secțiuni.
  - În secțiunea I, efortul axial este $N_I = F$. Tensiunea maximă la întindere este:

$$\sigma = \frac{N_I}{A_I} = \frac{F}{A_I} = \frac{F}{(b-d) \cdot t} = 133{,}3 \text{ MPa} < \sigma_a$$

  - În secțiunea II, efortul axial este:

$$N_{II} = F - F_{nit} = F - F_1 = 30 \text{ KN}$$

iar tensiunea normală din această secțiune,

$$\sigma = \frac{N_{II}}{A_{II}} = \frac{N_{II}}{(b-2d) \cdot t} = 150 \text{ MPa} < \sigma_a$$

  - Secțiunea III, nu mai prezintă importanță, deoarece este mai puțin periculoasă decât celelalte două. Cu toate astea, să calculăm tensiunea normală şi în această secțiune.

Efortul axial din secțiunea III, este:

$$N_{III} = F - 3F_{nit} = F - 3F_1 = 10 \text{ KN}$$

iar tensiunea normală,

$$\sigma = \frac{N_{III}}{A_{III}} = \frac{N_{III}}{(b-d) \cdot h} = 33{,}3 \text{ MPa} < \sigma_a$$

În urma calculelor efectuate, rezultă că toate elementele îmbinării satisfac condiția de rezistență.

7. ÎNCOVOIEREA BARELOR PLANE

Dacă în secțiunea transversală a unui element de rezistență există un singur efort şi acesta este momentul încovoietor M_i, se spune că în acea secțiune se realizează o solicitare de *încovoiere pură.*

- ❖ În funcție de *poziția în spațiu a forțelor exterioare*, solicitarea de încovoiere este:
  - *plană*, dacă toate forțele exterioare sunt situate într-un singur plan longitudinal şi conține una din axele principale centrale de inerție ale tuturor secțiunilor transversale ale barei
  - *oblică,* dacă toate forțele exterioare sunt într-un singur plan, care nu conține axele principale centrale de inerție ale tuturor secțiunilor transversale ale barei
  - *strâmbă,* dacă forțele exterioare sunt conținute în plane longitudinale diferite.
- ❖ În *funcție de natura eforturilor* din secțiunea transversală a barei, solicitarea de încovoiere poate fi:
  - *pură*, dacă în secțiunea transversală acționează numai momente încovoietoare
  - *simplă (*sau *cu forță tăietoare),* dacă în secțiunea transversală a barei pe lângă moment încovoietor există şi efort tăietor.

În practică, cea mai întâlnită este încovoierea simplă, încovoierea pură întâlnindu-se destul de rar.

7.1 TENSIUNI ÎN BARE DREPTE SOLICITATE LA ÎNCOVOIERE PURĂ

Studiul încovoierii pure se face acceptând următoarele ipoteze:

- Direcția forțelor exterioare trece prin centrul de greutate al secțiunii transversale
- Bara prezintă un plan de simetrie, care este şi planul forțelor exterioare. Direcția centrală a secțiunii transversale care este axa de simetrie, este şi direcție centrală principală de inerție
- Axa longitudinală a barei este o linie dreaptă
- Înălțimea secțiunii transversale a barei este mică în raport cu lungimea acesteia
- Materialul se supune legii lui Hooke

- Este valabilă ipoteza secțiunilor plane a lui Bernoulli.
  Se consideră o bară dreaptă de secțiune constantă solicitată ca în Fig.7.1-1a.

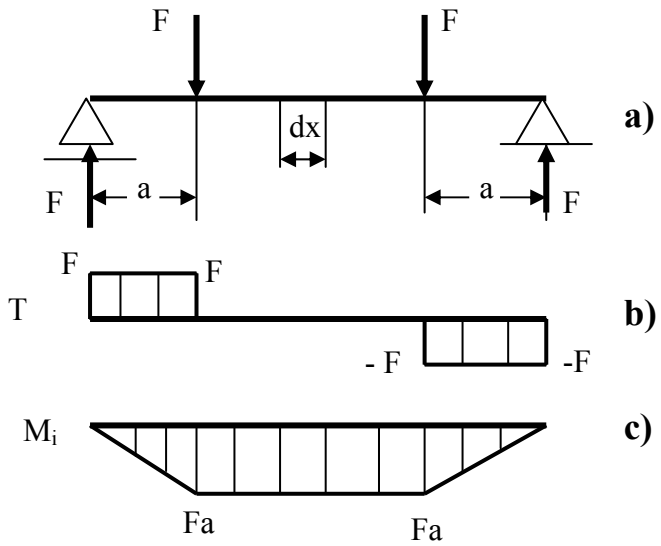


Fig.7.1-1

Analizând diagramele de eforturi (Fig.7.1-1b,c) se constată că intervalul din mijloc este solicitat la încovoiere pură, iar cele laterale la încovoiere simplă.

Din intervalul solicitat la încovoiere pură se detaşează un element dx. În Fig.7.1-2a se prezintă acest element înainte de solicitare, raportat la sistemul de axe centrale xOy. Prin solicitarea de încovoiere, elementul împreună cu grinda se deformează, secțiunile transversale rotindu-se. Unghiul dφ cu care se rotesc două secțiuni transversale situate la distanța dx una de cealaltă, se numeşte *rotire elementară.* Raportul dintre rotirea elementară şi lungimea elementului dx, se numeşte *rotire specifică:*

$$\theta = \frac{d\varphi}{dx} \qquad 7.1\text{-}1$$

Prin deformarea elementului, fibrele sale îşi modifică dimensiunea. Unele se lungesc, iar altele se scurtează (Fig.7.1-2b). Există însă şi fibre care nu şi-au modificat dimensiunea. Aceste fibre se numesc *fibre medii deformate.*

O fibră situată la distanța y de axa Oz se lungeşte cu cantitatea Δdx (Fig.7.1-1b). Fiind valabilă ipoteza secțiunilor plane a lui Bernoulli, adică secțiunile transversale rămân plane şi normale la axa deformată a elementului, lungirea fibrei se poate exprima cu relația:

$$\Delta dx = y \cdot d\varphi \qquad 7.1\text{-}2$$

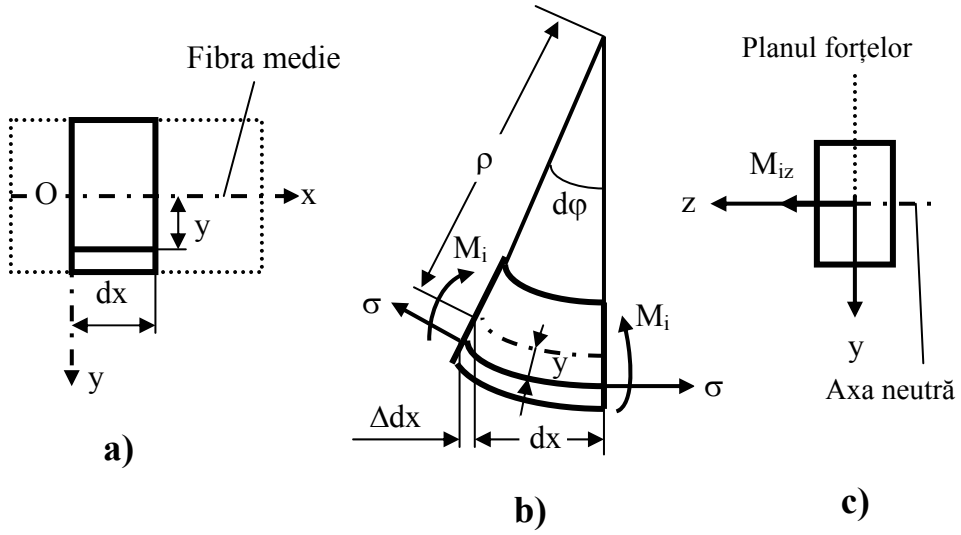


Fig.7.1-2

Dacă ρ reprezintă raza de curbură a fibrei care nu şi-a modificat lungimea, atunci se poate scrie:

$$dx = \rho \cdot d\varphi \qquad 7.1\text{-}3$$

iar lungirea specifică este:

$$\varepsilon = \frac{\Delta dx}{dx} = \frac{y \cdot d\varphi}{\rho \cdot d\varphi} = \frac{y}{\rho} \qquad 7.1\text{-}4$$

Dacă solicitarea este în domeniul valabilității legii lui Hooke, lungirii specifice îi corespunde o tensiune normală σ:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon = E \cdot \frac{y}{\rho} \qquad 7.1\text{-}5$$

unde,

E - reprezintă *modulul de elasticitate longitudinal* al materialului barei.

Relația 7.1-5, arată că tensiunea normală la încovoierea pură variază liniar pe secțiune (este funcție de y), crescând odată cu depărtarea față de fibra medie. Tensiunea este nulă la nivelul fibrei medii şi maximă în fibrele cele mai depărtate de fibra medie. Fibrele pentru care y = 0 şi tensiunea normală este nulă, formează *planul neutru.* Axa Oz prin care planul neutru intersectează secțiunea transversală a grinzii, se numeşte *axă neutră.*

Pentru exemplul prezentat, fibrele situate sub planul neutru sunt întinse, cele deasupra planului neutru sunt comprimate, iar cele din planul neutru nu sunt solicitate.

Punctele situate la aceeaşi distanță de axa neutră (y = const.), au aceeaşi tensiune normală.

Tensiunea normală maximă are loc în fibrele cele mai depărtate de axa neutră, cele care au y_{max}:

$$\sigma_{max} = E \cdot \frac{y_{max}}{\rho} \qquad 7.1\text{-}6$$

Din cele 6 relații de echivalență dintre eforturi şi tensiuni, pentru solicitarea de încovoiere pură se pot scrie numai trei, cele în care intervine tensiunea normală σ:

$$N = \int_A \sigma \cdot dA = 0 \qquad 7.1\text{-}7a$$

$$M_{iy} = \int_A \sigma \cdot z \cdot dA = 0 \qquad 7.1\text{-}7b$$

$$M_{iz} = \int_A \sigma \cdot y \cdot dA \neq 0 \qquad 7.1\text{-}7c$$

În cazul nostru nu există efort axial (este încovoiere pură), iar singurul moment încovoietor care există este orientat după direcția Oz şi este M_{iz}.

Ținând seama de relația 7.1-5, relațiile 7.1-7a,b,c capătă formele:

$$N = \frac{E}{\rho} \cdot \int_A y \cdot dA = 0 \;\Rightarrow\; \int_A y \cdot dA = 0 \qquad 7.1\text{-}8a$$

$$M_{iy} = \frac{E}{\rho} \cdot \int_A z \cdot y \cdot dA = 0 \;\Rightarrow\; \int_A z \cdot y \cdot dA = 0 \qquad 7.1\text{-}8b$$

$$M_{iz} = \frac{E}{\rho} \cdot \int_A y^2 \cdot dA \qquad 7.1\text{-}8c$$

Relația 7.1-8a reprezintă momentul static al suprafeței secțiunii transversale față de axa Oz şi arată că axa neutră trece prin centrul de greutate al

secțiunii transversale, deoarece numai față de o axă centrală momentul static al unei suprafețe este nul. Înseamnă că originea O a sistemului de coordonate ales, coincide cu centrul de greutate al secțiunii transversale (O ≡ G).

Relația 7.1-8b reprezintă momentul de inerție centrifugal. Se știe că momentul de inerție centrifugal al unei secțiuni este nul numai pentru sistemul de axe principale de inerție. De aici rezultă că momentul încovoietor trebuie să fie orientat după o direcție principală de inerție.

Ținând seama de expresia momentului de inerție axial

$$I_z = \int_A y^2 \cdot dA \qquad 7.1\text{-}9$$

relația 7.1-8c capătă forma:

$$M_{iz} = \frac{E}{\rho} \cdot I_z \;\Rightarrow\; \frac{1}{\rho} = \frac{M_{iz}}{E \cdot I_z} \;\Rightarrow\; \rho = \frac{E \cdot I_z}{M_{iz}} \qquad 7.1\text{-}10$$

şi permite determinarea razei de curbură a fibrei medii deformate la solicitarea de încovoiere pură a unei bare.

Relația 7.1-5 care exprimă tensiunea normală la încovoiere pură, ținând seama de relația 7.1-10, devine:

$$\sigma = \frac{1}{\rho} \cdot E \cdot y = \frac{M_{iz}}{E \cdot I_z} \cdot E \cdot y$$
$$\Rightarrow \sigma = \frac{M_{iz}}{I_z} \cdot y \qquad 7.1\text{-}11$$

Relația 7.1-11, cunoscută şi sub numele de *relația lui L. M. H. Navier*, permite calculul tensiunii normale într-un punct situat la distanța y de axa neutră dintr-o secțiune solicitată la încovoiere pură.

Şi relația 7.1-11 arată că tensiunea normală la încovoiere este o funcție liniară de distanța punctului la axa neutră (Fig.7.1-3).

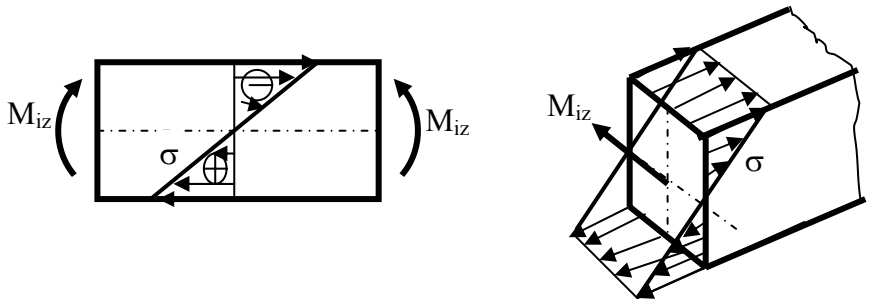


Fig.7.1-3

În calculele practice, interesează mai mult valoarea maximă a tensiunii normale, şi aceasta se produce în fibrele extreme. Formula lui Navier (relația 7.1-11) se poate scrie sub forma:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{iz}}{I_z} \cdot y_{max} = \frac{M_{iz}}{\frac{I_z}{y_{max}}} = \frac{M_{iz}}{W_{z,min}} \qquad 7.1\text{-}12$$

În calculele de rezistență, la solicitarea de încovoiere pură pentru cele trei tipuri de problemă, relațiile de calcul sunt:

❖ *Probleme de verificare*

$$\sigma_{max} = \frac{M_{iz}}{W_{z,min}} \leq \sigma_a \qquad 7.1\text{-}13$$

❖ *Probleme de dimensionare*

$$W_{z,min,nec} = \frac{M_{iz}}{\sigma_a} \qquad 7.1\text{-}14$$

❖ *Probleme de efort capabil*

$$M_{iz,cap} = W_{z,min} \cdot \sigma_a \qquad 7.1\text{-}15$$

Calculul de rezistență al barelor drepte solicitate la încovoiere se face în secțiunea periculoasă a barei, adică în secțiunea în care tensiunea normală are valoarea cea mai mare.

În secțiunile transversale ale barelor solicitate la încovoiere pot exista concentratori de tensiune, care modifică distribuția tensiunii, mai ales în imediata vecinătate a acestora. În acest caz, tensiunea determinată cu formula lui Navier, dă numai valoarea *tensiunii nominale* σ_n, valoarea tensiunii normale maxime calculându-se cu ajutorul *coeficientului de concentrare* α_k:

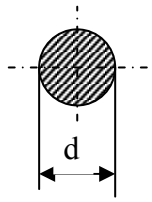
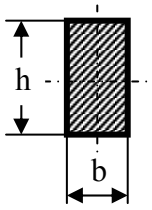
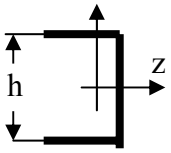
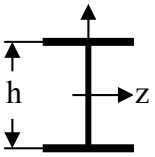
$$\sigma_{max} = \alpha_k \cdot \sigma_n = \alpha_k \cdot \frac{M_{iz}}{W_{z,min}} \qquad 7.1\text{-}16$$

Valorile lui α_k, se determină pe cale experimentală şi ele se găsesc în literatura de specialitate sub formă tabelară sau de diagrame.

7.2 FORME RAȚIONALE DE SECȚIUNE PENTRU SOLICITAREA DE ÎNCOVOIERE

Din relația de calcul a tensiunii normale maxime, reiese că o bară solicitată la încovoiere, prezintă o rezistență mai mare cu cât modulul de rezistență minim are o valoare mai mare. Modulul de rezistență depinde de mărimea secțiunii dar şi de forma acesteia. De asemenea o mare importanță o are şi modul de aşezare al secțiunii față de planul forțelor exterioare. În practică se urmăreşte obținerea unei rezistențe cât mai mari a barei, cu un consum de material cât mai mic. O secțiune transversală este cu atât mai economică, cu cât raportul $W_{z,min}/A$, este mai mare. În Tabelul 7.2-1 se prezintă valoarea acestui raport pentru câteva forme de secțiune des întâlnite la elementele solicitate la încovoiere.

Tabelul 7.2-1

Forma secțiunii				
$W_{z,min}$ / A	0,125 d	0,167 h	0,25 h	0,3 h

La profilele laminate, secțiunea este îngustată în apropierea axei neutre Gz, deoarece aici şi tensiunile normale la încovoiere sunt mici. Față de direcția Gy, modulul de rezistență are o valoare mică, ceea ce face ca rezistența grinzii la încovoiere față de axa Gy să fie mică. Ca urmare, profilele laminate **U** şi **I** trebuie astfel aşezate încât axa Gy să coincidă cu planul forțelor şi atunci se obține rezistența la încovoiere cea mai mare.

La secțiunea circulară şi pătrată, modulul de rezistență este relativ mic, deoarece cel mai mult material se află în apropierea axei neutre, acolo unde tensiunile normale sunt mici. Secțiunea circulară, în schimb, prezintă avantajul că are aceeaşi rezistență la încovoiere față de orice axă centrală. Această însuşire este utilizată în cazul arborilor. Pentru solicitarea de încovoiere, secțiunea inelară este de preferat celei circulare.

La materialele care prezintă rezistență diferită la întindere față de compresiune, cum este spre exemplu fonta, mai raționale sunt secțiunile la care axa neutră nu este axă de simetrie. În această categorie, intră secțiunile în formă de **T** , **I** cu tălpi neegale sau secțiunile trapezoidale etc. La aceste elemente, de mare importanță este modul de aşezare al grinzii față de sensul forțelor. La materialele cu rezistență la compresiune mai mare decât la întindere, grinda se aşează astfel încât tensiunile cele mai mari să fie de compresiune. În cazul unui

profil **T** (Fig.7.2-1), şi o solicitare de încovoiere care întinde fibrele de jos, talpa profilului **T** trebuie să fie în partea de jos (distanța de la axa neutră la fibra cea mai depărtată a tălpii este mai mică decât până la celelalte fibre extreme).

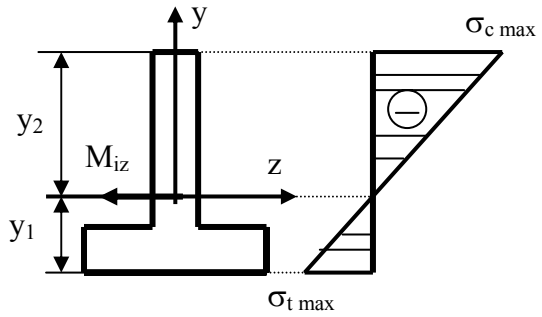


Fig.7.2-1

La o grindă din fontă având secțiunea sub formă de **T** la care raportul dintre tensiunea admisibilă la compresiune şi cea la întindere este 2,5, profilul trebuie astfel aşezat încât să se verifice relația:

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{\sigma_{c\ max}}{\sigma_{t\ max}} = 2{,}5 \qquad 7.2\text{-}1$$

7.3 ÎNCOVOIEREA CU FORȚĂ TĂIETOARE

7.3.1 Tensiuni tangențiale la încovoierea cu forță tăietoare

La încovoierea simplă sau încovoierea cu forță tăietoare, într-un punct din secțiunea transversală a unei grinzi, există atât tensiune normală σ produsă de momentul încovoietor M_i, cât şi tensiune tangențială τ produsă de efortul tăietor T. Fie un element de volum paralelipipedic decupat dintr-o grindă (Fig.7.3.1-1) care are fața *abcd* situată în planul secțiunii transversale, iar fața *abef* într-un plan orizontal, paralel cu planul xGz. Pe fețele lui, conform principiului dualității tensiunilor tangențiale (care se va prezenta în paragraful 8.5), acționează tensiunile tangențiale $\tau_{xy} = \tau_{yx}$. Sub acțiunea tensiunilor tangențiale paralelipipedul se deformează, iar secțiunile plane şi normale la axa barei înainte de deformare nu mai rămân plane, ci ele se deplanează. Deplanarea este mai mare în apropierea axei neutre şi mai mică în apropierea fibrelor extreme. Ca

urmare, ipoteza lui Bernoulii nu mai este îndeplinită, iar formula lui Naviere pentru calculul tensiunii normale la încovoiere nu mai este exactă.

Tensiunile tangențiale τ_{xy} şi τ_{zx} trebuie să satisfacă relațiile de echivalență dintre eforturi şi tensiuni:

$$T_y = T = \int_A \tau_{xy} \cdot dA \neq 0 \qquad 7.3.1\text{-}1a$$

$$T_z = \int_A \tau_{xz} \cdot dA = 0 \qquad 7.3.1\text{-}1b$$

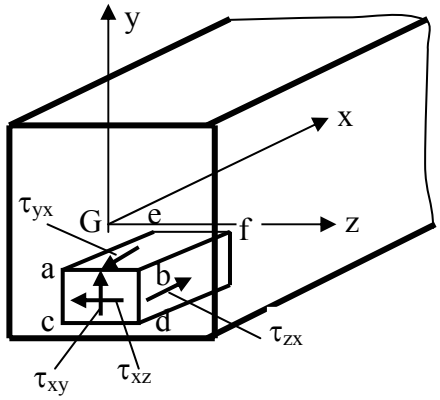


Fig.7.3.1-1

Din relațiile 7.3.1-1a,b rezultă că tensiunea tangențială τ_{xy} trebuie să existe, iar τ_{zx} sunt nule sau de semne contrare.

Se consideră acum un element de lungime dx (Fig.7.3.1-2a) decupat dintr-o bară solicitată la încovoiere simplă.

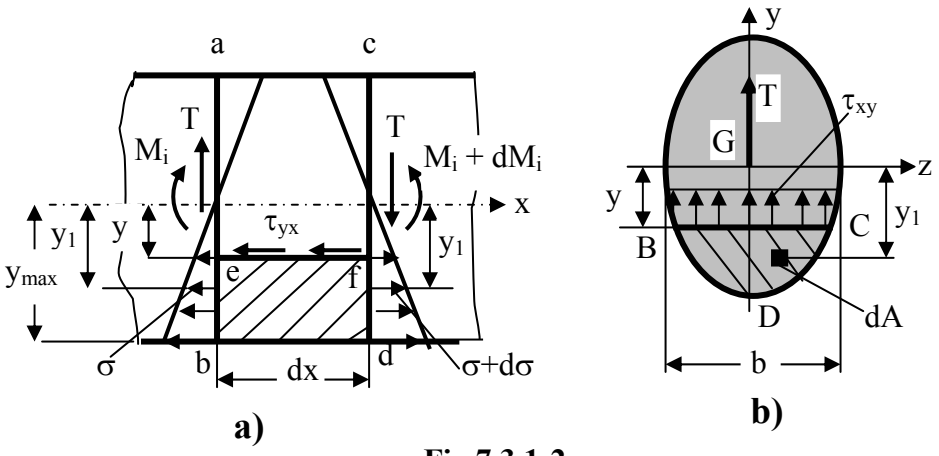


Fig.7.3.1-2

Pe cele două fețe acționează momentele încovoietoare: M_i şi $M_i + dM_i$ şi forța tăietoare $T \equiv T_y$ considerată constantă. Aceste eforturi, produc pe cele două fețe tensiunile normale σ şi $\sigma + d\sigma$, respectiv tensiunea tangențială τ_{xy}. Dacă se face o secțiune orizontală prin bară cu ajutorul unui plan paralel cu planul xGz se obține elementul de volum haşurat. În planul orizontal, acționează tensiunile tangențiale $\tau_{yx} = \tau_{xy}$. Conform ipotezei lui Juravski, pe linia BC paralelă cu axa neutră (Fig.7.3.1-2b), tensiunile τ_{xy} sunt constante. Se notează cu y distanța de la linia BC la axa neutră şi cu y_1 distanța unui element oarecare al suprafeței BCD la axa neutră. Pe fața din stânga *aeb* (Fig.7.3.1-2a), tensiunea normală σ într-un punct situat la distanța y_1 de axa neutră, este:

$$\sigma = \frac{M_i}{I_y} \cdot y_1$$

7.3.1-3

Tensiunea normală de pe fața *eb,* produce un efort axial:

$$N = \int_{BCD} \sigma \cdot dA = \int_{BCD} \frac{M_i}{I_z} \cdot y_1 \cdot dA = \frac{M_i}{I_z} \cdot \int_{BCD} y_1 \cdot dA = \frac{M_i}{I_z} \cdot S_z \qquad 7.3.1\text{-}4$$

unde

S_z - este momentul static față de axa Gz a porțiunii de secțiune BCD situată sub linia BC (sub planul de lunecare BC):

$$S_z = \int_{BCD} y_1 \cdot dA = \int_{y}^{y_{max}} y_1 \cdot dA \qquad 7.3.1\text{-}5$$

Asemănător, se poate scrie pentru fața *fd* (Fig.7.3.1-2a) la aceeaşi distanță y_1 de axa neutră:

$$\sigma + d\sigma = \frac{M_i + dM_i}{I_z} \cdot y_1 \qquad 7.3.1\text{-}6$$

de unde rezultă:

$$N + dN = \int_{BCD} \frac{M_i + dM_i}{I_z} \cdot y_1 \cdot dA = \frac{M_i + dM_i}{I_z} \cdot S_z \qquad 7.3.1\text{-}7$$

Scriind o ecuație de proiecții a tuturor forțelor aplicate pe direcția x, în care intră N, N+dN şi cea dată de tensiunea tangențială de pe fața *ef* (τ_{yx} b·dx), se obține:

$$N + \tau_{yx} \cdot b \cdot dx - (N + dN) = 0 \qquad 7.3.1\text{-}8$$

Înlocuind relațiile 7.3.1-4 şi 7.3.1-7 în relația 7.3.1-8, aceasta devine:

$$\frac{M_i}{I_z} \cdot S_z + \tau_{yx} \cdot b \cdot dx - \frac{M_i}{I_z} \cdot S_z - \frac{dM_i}{I_z} \cdot S_z = 0 \qquad 7.3.1\text{-}9$$

de unde, după reduceri se obține:

$$\tau_{yx} = \frac{dM_i \cdot S_z}{dx \cdot b \cdot I_z} = \frac{dM_i}{dx} \cdot \frac{S_z}{b \cdot I_z} = T \cdot \frac{S_z}{b \cdot I_z} = \frac{T \cdot S_z}{b \cdot I_z} \qquad 7.3.1\text{-}10$$

În relația 7.3.1-10, s-a ținut seama de relația diferențială care există între efortul tăietor şi momentul încovoietor ($T = dM_i /dx$).

Fiind valabil principiul dualității tensiunilor tangențiale ($\tau_{yx} = \tau_{xy}$), din relația 7.3.1-10, se deduce relația de calcul a tensiunii tangențiale din secțiunea transversală a unui element de rezistență, secțiune în care acționează efortul tăietor $T \equiv T_y$:

$$\tau_{xy} = \tau = \frac{T \cdot S_z}{b \cdot I_z} \qquad 7.3.1\text{-}11$$

Relația 7.3.1-11 este cunoscută sub denumirea de *relația lui Jurawski.* Semnificația mărimilor din relația lui Juravski, este următoarea:

T – efortul tăietor din secțiune

I_z – momentul de inerție al întregii secțiuni, față de axa neutră

b - lățimea secțiunii la nivelul la care se calculează tensiunea tangențială

S_z – momentul static al suprafeței cuprinse între nivelul la care se calculează tensiunea şi fibrele extreme, calculat față de axa neutră.

Cum într-o secțiune, efortul tăietor T şi momentul de inerție I_z sunt constante, rezultă că variația tensiunii tangențiale pe secțiune este impusă de variația raportului S_z / b. Variația acestui raport, după cum se poate constata, nu este una liniară, ea depinde de la caz la caz.

La nivelul la care secțiunea prezintă o modificare bruscă de lățime, diagrama de variație a tensiunii tangențiale prezintă o discontinuitate (salt).

7.3.2 Variația tensiunii tangențiale la suprafețe simple

a) Suprafață dreptunghiulară Se consideră o secțiune dreptunghiulară la care se scrie expresia tensiunii tangențiale în punctele situate la distanța y de axa neutră (Fig.7.3.2-1a).

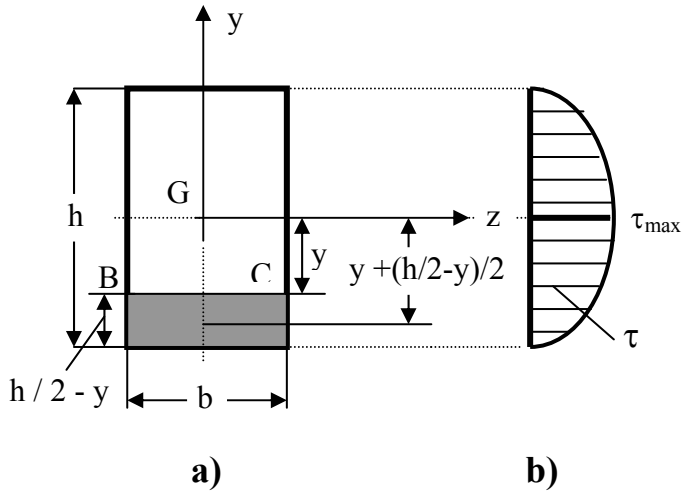


Fig.7.3.2-1

Se calculează mai întâi momentul static al suprafeței cuprinse între nivelul punctului la care se calculează tensiunea (nivelul BC) şi fibrele extreme (suprafața umbrită din Fig.7.3.2-1) față de axa neutră:

$$S_z = b \cdot \left(\frac{h}{2} - y\right) \cdot \left(y + \frac{h}{4} - \frac{y}{2}\right) = \left(\frac{h^2}{4} - y^2\right) \cdot \frac{b}{2} \qquad 7.3.2\text{-}1$$

Tensiunea tangențială la nivelul y de axa neutră, este.

$$\tau = \frac{T \cdot \left(\frac{h^2}{4} - y^2\right) \cdot \frac{b}{2}}{b \cdot \frac{b \cdot h^3}{12}} = \frac{6 \cdot T \cdot \left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)}{b \cdot h^3} = \frac{T \cdot h^2 \cdot \left(1{,}5 - 6 \cdot \frac{y^2}{h^2}\right)}{b \cdot h^3} =$$

$$= \frac{T \cdot \left(1{,}5 - 6 \cdot \frac{y^2}{h^2}\right)}{b \cdot h} = \left(1{,}5 - 6 \cdot \frac{y^2}{h^2}\right) \cdot \frac{T}{A} \qquad 7.3.2\text{-}2$$

Cum variabila este y, rezultă că pentru secțiuni dreptunghiulare, tensiunea tangențială variază pe secțiune după o parabolă. Valorile extreme ale tensiunii tangențiale se obțin pentru y = 0 şi y = h / 2.

Astfel:

- pentru y = h / 2 (în fibrele extreme)

$$\tau = \left(1{,}5 - 6 \cdot \frac{\frac{h^2}{4}}{h^2}\right) \cdot \frac{T}{A} = (1{,}5 - 1{,}5) \cdot \frac{T}{A} = 0 \qquad 7.3.2\text{-}3$$

În fibrele extreme, acolo unde tensiunea normală este maximă, tensiunea tangențială este nulă.

- pentru y = 0 (la nivelul axei neutre)

$$\tau = \left(1{,}5 - 6 \cdot \frac{0}{h^2}\right) \cdot \frac{T}{A} = 1{,}5 \cdot \frac{T}{A} \qquad 7.3.2\text{-}4$$

La nivelul axei neutre, acolo unde tensiunea normală este nulă, tensiunea tangențială este maximă.

După cum s-a constatat, maximul fiecărei tensiuni (normală şi tangențială), se produce individual, de unde în fibrele extreme nu trebuie să se țină seama de tensiunile tangențiale. De altfel, la piesele de grosime mare, tensiunea tangențială are valori relativ mici, motiv pentru care de cele mai multe ori, acestea se neglijează în calculele de rezistență.

Calculul tensiunii tangențiale maxime cu relația lui Jurawski, pentru secțiuni dreptunghiulare, conduce la un spor de 50 % față de calculul acesteia cu relația aproximativă, utilizată la forfecarea pieselor de grosime mică ($\tau = T / A$).

Variația tensiunii tangențiale pe o secțiune dreptunghiulară, este prezentată în Fig.7.3.2-1b.

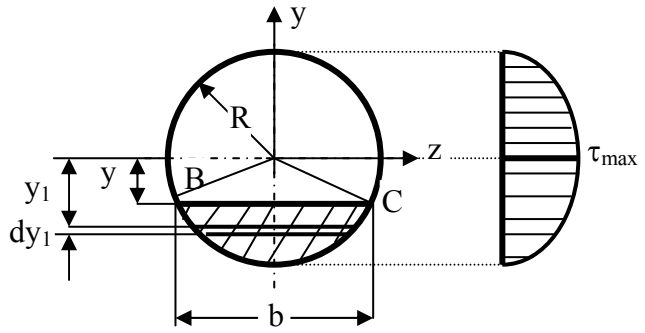
b) Suprafață circulară. Pentru secțiunea circulară (Fig.7.3.2-2a), se poate scrie:

$$BC = b = 2 \cdot \sqrt{R^2 - y^2} \qquad 7.3.2\text{-}5$$

Momentul static al suprafeței de sub planul de lunecare, este:

$$S_z = \int_y^R y_1 \cdot dA = \int_y^R y_1 \cdot 2 \cdot \sqrt{R^2 - y_1^2} \cdot dy_1$$

$$S_z = 2 \cdot \int_y^R \sqrt{R^2 - y_1^2} \cdot y_1 \cdot dy_1 = -\int_y^R \left(R^2 - y_1^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot d\left(R^2 - y_1^2\right) = \frac{2}{3} \cdot \left(R^2 - y^2\right)^{\frac{3}{2}} \qquad 7.3.2\text{-}6$$



a) **b)**

Fig.7.3.2-2

Cu aceste mărimi, relația lui Jurawski devine:

$$\tau = \frac{T \cdot S_z}{b \cdot I_z} = \frac{T \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(R^2 - y^2\right)^{\frac{3}{2}}}{2 \cdot \left(R^2 - y^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\pi \cdot R^4}{4}} = \frac{4}{3} \cdot \frac{T}{\pi \cdot R^4} \cdot \left(R^2 - y^2\right) =$$

$$= \frac{4}{3} \cdot \frac{T}{\pi \cdot R^4} \cdot R^2 \cdot \left(1 - \frac{y^2}{R^2}\right) = \frac{4}{3} \cdot \frac{T}{\pi \cdot R^2} \cdot \left(1 - \frac{y^2}{R^2}\right) = \frac{4}{3} \cdot \frac{T}{A} \cdot \left(1 - \frac{y^2}{R^2}\right) \qquad 7.3.2\text{-}7$$

Relația 7.3.2-7, arată că şi pentru secțiuni circulare, tensiunea tangențială variază tot parabolic pe secțiune. Valorile extreme ale tensiunii tangențiale pentru secțiunea circulară sunt:

- pentru y = R

$$\tau = \frac{4}{3} \cdot \frac{T}{A} \cdot \left(1 - \frac{R^2}{R^2}\right) = 0 \qquad 7.3.2\text{-}8$$

Tensiunea tangențială în fibrele cele mai depărtate de axa neutră este nulă.

- pentru y = 0

$$\tau = \tau_{max} = \frac{4}{3} \cdot \frac{T}{A} \qquad 7.3.2\text{-}9$$

Tensiunea tangențială are valoare maximă la nivelul axei neutre şi este cu 33,3 % mai mare decât cea calculată cu relația aproximativă de la forfecarea pieselor de grosime mică.

Variația tensiunii tangențiale este prezentată în Fig.7.3.2-2b.

c) ***Suprafață inelară cu perete subțire.*** Şi în cazul secțiunilor inelare, tensiunea tangențială are valoare maximă tot în dreptul axei neutre (Fig.7.3.2-3).

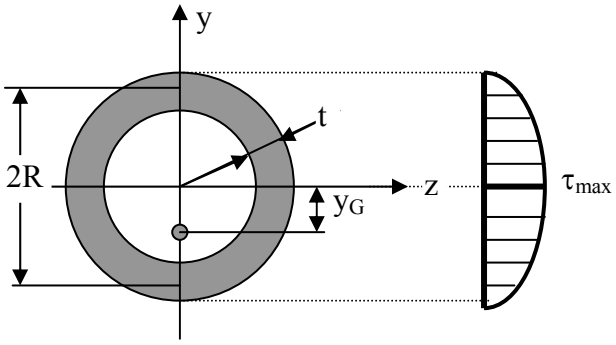


Fig.7.3.2-3

Dacă secțiunea este cu perete subțire, momentul de inerție axial al secțiunii, poate fi exprimat funcție de aria secțiunii A şi de raza medie R a secțiunii:

$$I_z = \frac{1}{2} \cdot I_p = \frac{1}{2} \cdot A \cdot R^2 \qquad 7.3.2\text{-}10$$

La rândul său, momentul static față de axa neutră a jumătății de secțiune, este

$$S_{z,max} = \frac{1}{2} A \cdot y_G = \frac{1}{2} \cdot A \cdot \frac{2 \cdot R}{\pi} = \frac{A \cdot R}{\pi} \qquad 7.3.2\text{-}11$$

Având în vedere că b = 2t, expresia tensiunii tangențiale maxime, la secțiunea inelară cu perete subțire, este:

$$\tau_{max} = \frac{T \cdot S_{z,max}}{b \cdot I_z} = \frac{T \cdot \frac{A \cdot R}{\pi}}{2t \cdot \frac{1}{2} \cdot A \cdot R^2} = \frac{T}{\pi \cdot R \cdot t} = \frac{T}{\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \pi \cdot R} = 2 \cdot \frac{T}{A} \qquad 7.3.2\text{-}12$$

În acest caz, se constată că valoarea tensiunii maxime este dublă față de cea calculată cu relația aproximativă de la forfecarea pieselor de grosime mică.

d) ***Suprafață în formă de U, cu perete subțire*** (Fig.7.3.2-4). La o astfel se secțiune compusă, se poate considera că secțiunea este formată din trei suprafețe dreptunghiulare. Pe înălțimea acestora, tensiunea tangențială τ_{xy} variază parabolic Fig.7.3.2-4b).

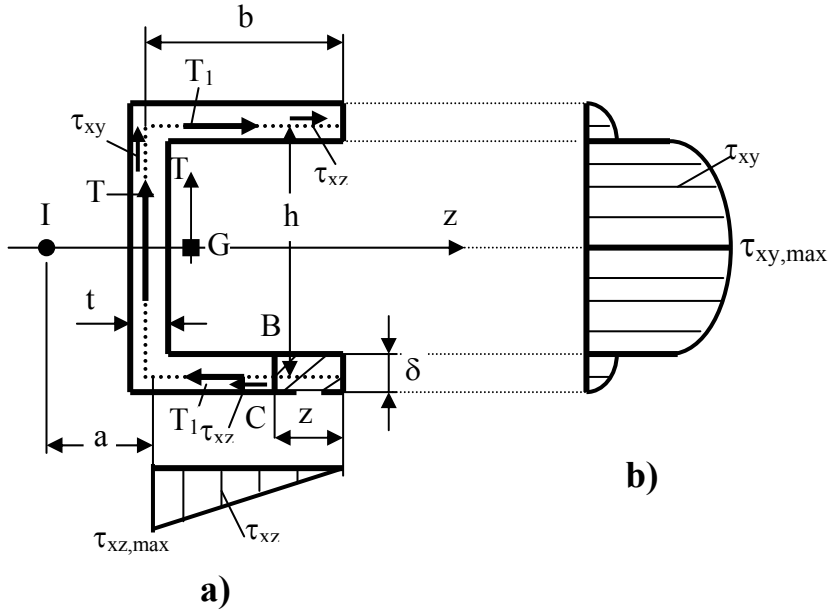


Fig.7.3.2-4

O dată cu trecerea de la talpă la inimă, lățimea profilului *scade brusc* şi ca urmare, valoarea tensiunii tangențiale τ_{xy} *creşte* şi ea brusc, obținându-se:

$$I_z \cong \frac{t \cdot h^3}{12} + 2 \cdot b \cdot \delta \cdot \frac{h^2}{4} \qquad 7.3.2\text{-}13a$$

$$S_{z,max} \cong \frac{t \cdot h^2}{8} + b \cdot \delta \cdot \frac{h}{2} \qquad 7.3.2\text{-}13b$$

Ținând seama de relațiile 7.3.2-13a,b, expresia tensiunii tangențiale maxime $\tau_{xymax} = \tau_{max}$, este:

$$\tau_{xy\,max} = \tau_{max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{T}{t \cdot h} \cdot \frac{t \cdot h + 4 \cdot b \cdot \delta}{t \cdot h + 6 \cdot b \cdot \delta} \qquad 7.3.2\text{-}14$$

Efortul tăietor T care acționează în centrul de greutate G al secțiunii, creează în tălpi şi tensiuni tangențiale τ_{xz}. Aceste tensiuni se determină tot cu relația lui Juravski, considerând însă linia BC perpendiculară pe axa tălpii. La o distanță z de capătul tălpii (Fig.7.3.2-4a), expresia tensiunii tangențiale τ_{xz}, are expresia:

$$\tau_{xz} = \frac{T \cdot S_z}{\delta \cdot I_z} = \frac{T \cdot h \cdot z}{2 \cdot I_z} \qquad 7.3.2\text{-}15$$

Aceste tensiuni variază liniar pe lungimea tălpii (în relația 7.3.2-15 variabila este z) şi are valoarea maximă pentru z = b (Fig.7.3.2-4a):

$$\tau_{xz\,max} = \frac{T \cdot h \cdot b}{2 \cdot I_z} = \frac{6 \cdot T \cdot b}{h\left(t \cdot h + 6 \cdot b \cdot \delta\right)} \qquad 7.3.2\text{-}16$$

Tensiunile tangențiale care acționează pe talpă dau o rezultantă T_1, egală cu:

$$T_1 = \frac{1}{2} \cdot b \cdot \delta \cdot \tau_{xz\,max} = \frac{3 \cdot T \cdot b^2 \cdot \delta}{h \cdot \left(t \cdot h + 6 \cdot b \cdot \delta\right)} \qquad 7.3.2\text{-}17$$

Mai departe, forțele T_1 din tălpi, creează un cuplu $M_t = T_1 \cdot h$. care solicită secțiunea la torsiune. Aşadar, sub acțiunea forțelor tăietoare chiar dacă ele acționează pe direcția centrului de greutate al secțiunii, se produce o solicitare suplimentară de torsiune la solicitarea de încovoiere simplă.

Pe axa neutră există atunci un punct I (Fig.7.3.2-4a) şi numit *centru de încovoiere*, față de care momentul tuturor tensiunilor tangențiale τ_{xy} şi τ_{xz} este nul. Dacă planul forțelor exterioare ar trece prin centrul de încovoiere al secțiunii transversale, secțiunea nu ar mai fi solicitată suplimentar la torsiune.
Apariția solicitării suplimentare de torsiune are loc în cazul barelor solicitate la încovoiere simplă, atunci când axa principală centrală de inerție situată în planul forțelor nu este şi axă de simetrie pentru secțiunea transversală a grinzii. Dacă planul forțelor este un plan de simetrie al secțiunii transversale, centrul de încovoiere ca şi centrul de greutate al secțiunii transversale este situat pe axa de simetrie.

Poziția centrului de încovoiere situat la distanța **a** de mijlocul inimii (Fig.7.3.2-4a), se determină uşor, din condiția:

$$M_I = T \cdot a - T_1 \cdot h = 0 \qquad 7.3.2\text{-}18$$

de unde se obține:

$$a = \frac{T_1}{T} \cdot h = \frac{b^2 \cdot h^2 \cdot \delta}{4 \cdot I_z} = \frac{3 \cdot b^2 \cdot \delta}{t \cdot h + 6 \cdot b \cdot \delta} \qquad 7.3.2\text{-}19$$

La calculul poziției centrului de încovoiere s-a presupus că rezultanta tuturor tensiunilor τ_{xz} trece prin inima secțiunii.

7.4 NEGLIJAREA TENSIUNII TANGENȚIALE ÎN UNELE CALCULE LA ÎNCOVOIERE SIMPLĂ

S-a mai precizat că în cazul solicitării de încovoiere simplă a pieselor de grosime mare, tensiunile tangențiale au valori relativ mici şi în unele situații se pot neglija. Nu este lipsit de interes, găsirea condiției care permite neglijarea tensiunii tangențiale în calculele de rezistență la încovoiere simplă.

Se consideră grinda de secțiune dreptunghiulară din Fig.7.4-1a. Diagramele de eforturi pentru această grindă, sunt prezentate în Fig.7.4-1b,c.

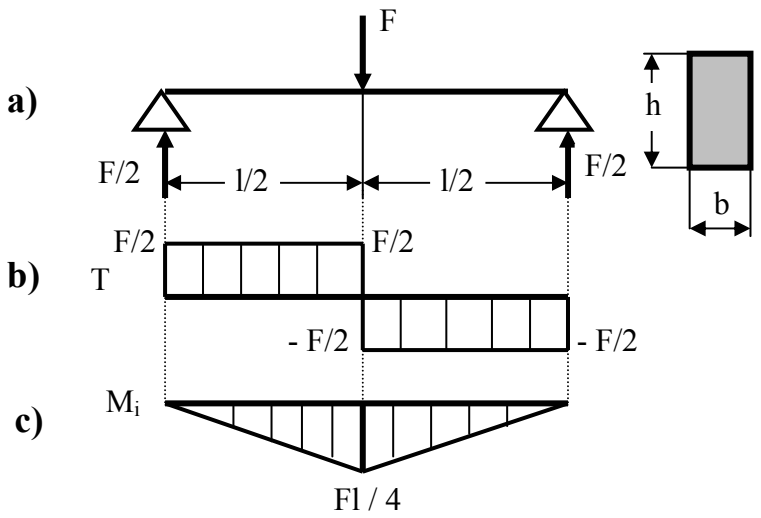


Fig.7.4-1

Eforturile din secțiunile periculoase (la forfecare şi la încovoiere) sunt:

$$T = \frac{F}{2} \quad ; \quad M_{iz} = \frac{F \cdot l}{4} \qquad 7.4\text{-}1$$

iar tensiunile maxime corespunzătoare, sunt:

$$\tau_{max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{T}{A} = \frac{3}{2} \cdot \frac{\frac{F}{2}}{b \cdot h} = \frac{3}{4} \cdot \frac{F}{b \cdot h} \qquad 7.4\text{-}2$$

$$\sigma_{max} = \frac{M_{iz}}{W_{z,min}} = \frac{\frac{F \cdot l}{4}}{\frac{b \cdot h^2}{6}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{F \cdot l}{b \cdot h^2} \qquad 7.4\text{-}3$$

Dacă se împarte relația 7.4-2 la relația 7.4-3, se obține:

$$\frac{\tau_{max}}{\sigma_{max}} = \frac{3}{4} \cdot \frac{F}{b \cdot h} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{b \cdot h^2}{F \cdot l} = \frac{h}{2 \cdot l} \qquad 7.4\text{-}4$$

Din relația 7.4-4 se constată că pentru grinzi la care raportul h / l este mic şi raportul τ_{max} / σ_{max} este mic, de unde rezultă că tensiunile tangențiale sunt mici în raport cu tensiunea normală şi ca urmare tensiunea tangențială se poate neglija. Raportul h / l este mic la grinzile la care deschiderea acesteia *l* (distanța dintre reazeme) este mare față de înălțimea secțiunii transversale *h* a grinzii. La grinzile cu deschidere mică, tensiunile tangențiale produse de efortul tăietor, nu pot fi neglijate.

7.5 ENERGIA DE DEFORMAȚIE LA ÎNCOVOIERE PURĂ

La solicitarea axială s-a determinat expresia energiei de deformație:

$$U = \int_V \frac{\sigma^2}{2 \cdot E} \cdot dV \qquad 7.5\text{-}1$$

Dacă se neglijează tensiunile tangențiale, relația 7.5-1 este valabilă şi pentru solicitarea de încovoiere pură. Înlocuind expresia tensiunii normale la încovoiere determinată cu relația lui Navier

$$\sigma = \frac{M_{iz}}{I_z} \cdot y \qquad 7.5\text{-}2$$

în relația energiei de deformație (relația 7.5-1), se obține:

$$U = \int_A \frac{1}{2 \cdot E} \cdot \frac{y^2 \cdot M_{iz}^2}{I_z^2} \cdot dA \cdot dx = \int_A \frac{1}{2 \cdot E} \cdot \frac{y^2 \cdot dA}{I_z^2} \cdot \int_l M_{iz}^2 \cdot dx \qquad 7.5\text{-}3$$

Relația 7.5-3 se mai poate scrie sub forma:

$$U = \frac{1}{2 \cdot E \cdot I_z^2} \cdot \int_A y^2 \cdot dA \cdot \int_l M_{iz}^2 \cdot dx = \frac{1}{2 \cdot E \cdot I_z^2} \cdot I_z \cdot \int_l M_{iz}^2 \cdot dx = \frac{1}{2 \cdot E \cdot I_z} \cdot \int_l M_{iz}^2 \cdot dx$$

sau în cazul general al barei cu secțiune şi moment încovoietor variabil, expresia energiei de deformație este:

$$U = \int_l \frac{M_{iz}^2}{2 \cdot E \cdot I_z} \cdot dx \qquad 7.5\text{-}4$$

7.6 GRINZI DE EGALĂ REZISTENȚĂ

La studiul încovoierii simple s-a constatat că tensiunile maxime se produc într-o secțiune sau într-un număr mic de secțiuni. Înseamnă că astfel de elemente de rezistență sunt calculate neeconomic. Se pot proiecta grinzi cu secțiune variabilă la care tensiunea normală maximă din fiecare secțiune transversală să fie egală cu tensiunea normală admisibilă. O astfel de grindă, la care tensiunea normală din fiecare secțiune transversală este egală cu cea admisibilă, se numeşte *grindă de egală rezistență.*

Condiția de rezistență pentru grinzile de egală rezistență, este:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{iz}(x)}{W_z(x)} = \sigma_a = \text{const.} \qquad 7.6\text{-}1$$

Din relația 7.6-1 rezultă că pentru grinzile de egală rezistență, secțiunea transversală trebuie să varieze în lungul grinzii, aşa cum variază $W_z(x)$ din relația 7.6-1:

$$W_z(x) = \frac{M_{iz}(x)}{\sigma_a} \qquad 7.6\text{-}2$$

În relațiile 7.6-1 şi 7.6-2, atât momentul încovoietor cât şi modulul de rezistență al secțiunii transversale a grinzii, variază în lungul grinzii, fiind funcție de abscisa x a secțiunii. Relația 7.6-2 permite determinarea variației secțiunii grinzii de egală rezistență, care depinde însă de modul de încărcare şi rezemare, precum şi de forma secțiunii transversale. În cazul unei solicitări de încovoiere pură, grinda de egală rezistență are secțiune constantă ($M_{iz}(x)$ este constant), iar pentru o solicitare de încovoiere simplă, grinda de egală rezistență este o grindă cu secțiune variabilă. La o variație continuă a secțiunii, relația 7.6-2 este aproximativă, deoarece ea este dedusă pentru grinda de secțiune constantă, dar diferențele sunt neglijabile.

Din relația 7.6-2 rezultă că în dreptul secțiunilor în care momentul încovoietor este nul şi modulul de rezistență trebuie să fie nul. Acest lucru în realitate nu este posibil deoarece, atunci, nu se mai realizează rezistența de ansamblu a grinzii. În secțiunile în care momentul încovoietor este nul, efort tăietor există şi se realizează o solicitare de forfecare, care permite dimensionarea acestor secțiuni transversale.

Grinda de egală rezistență are o serie de avantaje față de grinda cu secțiune constantă: economie de material, realizarea unor grinzi rezistente şi elastice, o repartiție uniformă a tensiunii în lungul grinzii etc. Cu toate aceste avantaje, grinzile de egală rezistență nu se utilizează în practică pe scară largă.

Aceasta se datorează în primul rând dificultății tehnologice de realizare a unor profile de egală rezistență, de montarea lor în ansamblul din care fac parte, de posibilitatea schimbării condițiilor de exploatare etc. Atunci când profilul grinzii de egală rezistență rezultat din relația 7.6-2 este dificil de realizat, se recurge la profile compuse cu variație discontinuă a secțiunii, care respectă pe cât posibil relația 7.6-2.

Se prezintă în continuare, câteva cazuri de grinzi de egală rezistență.

a) ***Grinda încastrată de secțiune dreptunghiulară cu lățime constantă, încărcată cu o forță concentrată, aplicată la capătul liber*** (Fig.7.6-1)

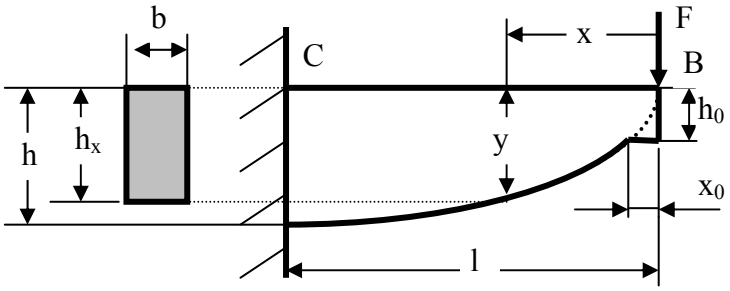


Fig.7.6-1

În Fig.7.6-1, profilul grinzii de egală rezistență pentru acest caz, este anticipat, şi trasat înainte de stabilirea relației de variație.

Tensiunea normală în secțiunea x de la capătul liber al grinzii de egală rezistență, este,

$$\sigma_{max} = \frac{M_{iz,x}}{W_{z,x}} = \frac{F \cdot x}{\frac{b \cdot h_x^2}{6}} = 6 \cdot \frac{F \cdot x}{b \cdot h_x^2} = \sigma_a \qquad 7.6\text{-}3$$

de unde rezultă expresia înălțimii secțiunii transversale:

$$h_x = \sqrt{\frac{6 \cdot F \cdot x}{b \cdot \sigma_a}} \qquad 7.6\text{-}4$$

Relația 7.6-4 arată că variația înălțimii secțiunii în lungul grinzii este parabolică.

Înălțimea maximă se obține pentru x = l:

$$y_{max} = h = \sqrt{\frac{6 \cdot F \cdot l}{b \cdot \sigma_a}} \qquad 7.6\text{-}5$$

În capătul liber al grinzii unde momentul încovoietor este nul, rezultă că înălțimea secțiunii este zero. În capătul liber, însă există efort tăietor care supune grinda la forfecare. Punând condiția de rezistență la forfecare în capătul liber, se obține înălțimea minimă h_0 a secțiunii transversale:

$$\tau_{max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{T}{A} = \frac{3}{2} \cdot \frac{F}{b \cdot h_0} = \tau_a \qquad 7.6\text{-}5$$

de unde se obține:

$$h_0 = \frac{3}{2} \cdot \frac{F}{b \cdot \tau_a} \qquad 7.6\text{-}7$$

Lungimea x_0 pe care se menține această înălțime minimă se determină din condiția de rezistență la încovoiere:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{iz}}{W_z} = \frac{F \cdot x_0}{\frac{b \cdot h_0^2}{6}} = 6 \cdot \frac{F \cdot x_0}{b \cdot \frac{9}{4} \cdot \frac{F^2}{b^2 \cdot \tau_a^2}} = \sigma_a$$

$$\Rightarrow \qquad x_0 = \frac{3}{8} \cdot \frac{F \cdot \sigma_a}{b \cdot \tau_a^2} \qquad 7.6\text{-}8$$

b) ***Grinda încastrată de secțiune dreptunghiulară cu lățime constantă, încărcată cu sarcină uniform distribuită pe toată lungimea*** (Fig.7.6-2)

În secțiunea situată la distanța x de capătul liber al grinzii, momentul încovoietor este:

$$M_{iz,x} = \frac{p \cdot x^2}{2} \qquad 7.6\text{-}9$$

iar condiția de rezistență, are expresia:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{iz,x}}{W_{z,x}} = \frac{\frac{p \cdot x^2}{2}}{\frac{b \cdot h_x^2}{6}} = 3 \cdot \frac{p \cdot x^2}{b \cdot h_x^2} = \sigma_a \qquad 7.6\text{-}10.$$

Din relația 7.6-10, se obține relația pentru variația înălțimii secțiunii transversale a grinzii:

$$h_x = x \cdot \sqrt{\frac{3 \cdot p}{b \cdot \sigma_a}} \qquad 7.6\text{-}11$$

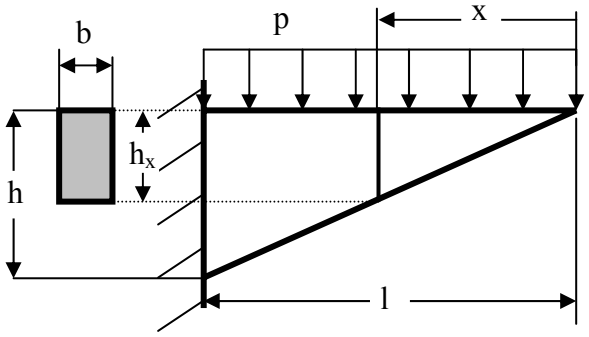


Fig.7.6-2

Din relația 7.6-11, rezultă o variație liniară pentru înălțimea secțiunii în lungul grinzii (Fig.7.6-2). Cum în capătul liber al grinzii efortul tăietor este nul, în această secțiune nu se mai pune condiția de rezistență la forfecare.
Înălțimea maximă a secțiunii transversale este cea din încastrare când x = l:

$$h_{max} = h = l \cdot \sqrt{\frac{3 \cdot p}{b \cdot \sigma_a}} \qquad 7.6\text{-}11$$

c) ***Grinda încastrată de secțiune dreptunghiulară cu înălțime constantă, încărcată cu o forță concentrată în capătul liber*** (Fig.7.6-3a)

În secțiunea situată la distanța x de capătul liber al grinzii, momentul încovoietor are expresia:

$$M_{iz,x} = F \cdot x \qquad 7.6\text{-}12$$

iar condiția de rezistență, rezultă:

$$\frac{M_{iz,x}}{W_{z,x}} = \frac{F \cdot x}{\frac{b_x \cdot h^2}{6}} = \frac{6 \cdot F \cdot x}{b_x \cdot h} = \sigma_a \qquad 7.6\text{-}13$$

Din relația 7.6-13 se obține relația pentru variația lățimii grinzii:

$$b_x = \frac{6 \cdot F}{h \cdot \sigma_a} \cdot x \qquad 7.6\text{-}14$$

şi este o variație liniară (Fig.7.6-3b).

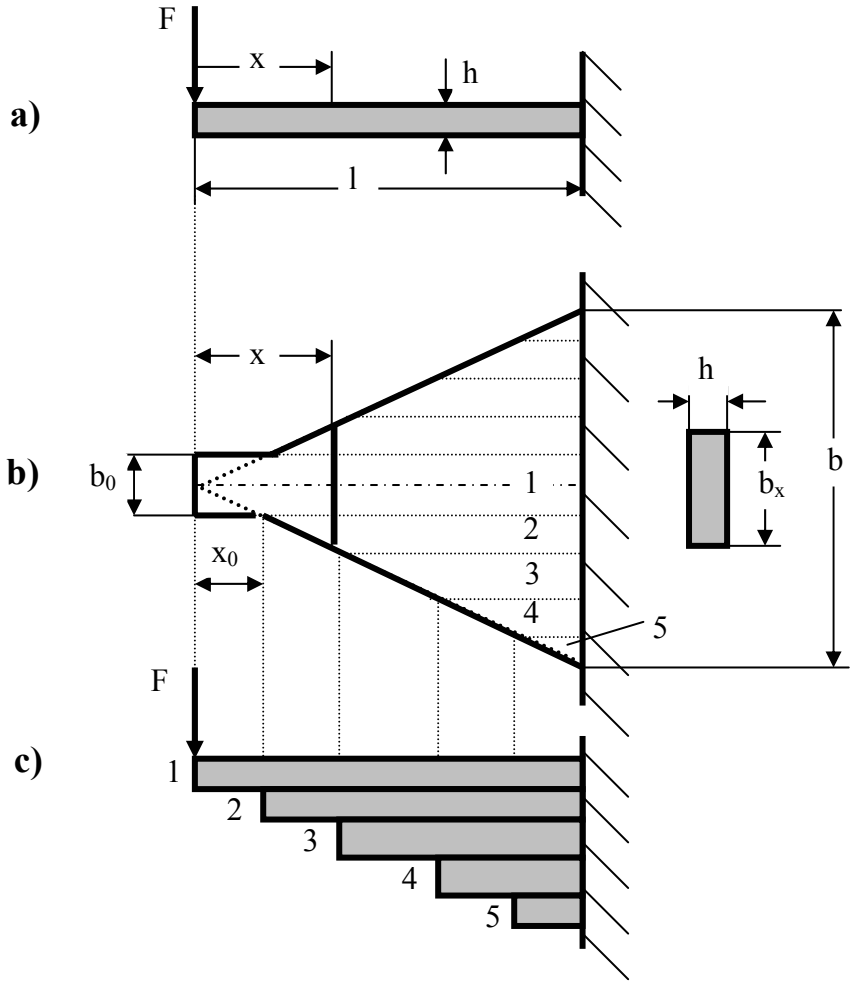


Fig.7.6-3

Punând condiția de rezistență la forfecare în capătul liber al grinzii, se obține lățimea minimă b_0:

$$\tau_{max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{T}{A} = \frac{3}{2} \cdot \frac{F}{b_0 \cdot h} = \tau_a \Rightarrow b_0 = \frac{3 \cdot F}{2 \cdot h \cdot \tau_a} \qquad 7.6\text{-}14$$

Această lățime minimă se păstrează pe lungimea x_0, care se determină din condiția de egală rezistență la încovoiere:

$$\sigma_a = \frac{F \cdot x_0}{\frac{b_0 \cdot h^2}{6}} = \frac{6 \cdot F \cdot x_0}{\frac{3 \cdot F}{2 \cdot h \cdot \tau_a} \cdot h^2} = \frac{4 \cdot x_0 \cdot \tau_a}{h}$$

$$\Rightarrow x_0 = \frac{\sigma_a}{\tau_a} \cdot \frac{h}{4} \qquad 7.6\text{-}15$$

Această grindă de egală rezistență, este utilizată pentru realizarea *arcului de foi*, atât de utilizat la autocamioane. Grinda se taie în lung în fâşii, după care foile se suprapun (Fig.7.6-3b,c).

d) ***Grinda de secțiune circulară simplu rezemată, încărcată cu sarcină distribuită şi o forță concentrată la mijlocul deschiderii*** (Fig.7.6-4a)

Reacțiunile sunt egale şi au valorile:

$$V_A = V_B = \frac{F}{2} + \frac{p \cdot l}{2} \qquad 7.6\text{-}16$$

iar în secțiunea x, momentul încovoietor este:

$$M_{iz,x} = V_A \cdot x - \frac{p \cdot x^2}{2} \qquad 7.6\text{-}17$$

Condiția de rezistență în secțiunea x, are forma:

$$W_{z,x} = \frac{M_{iz,x}}{\sigma_a} = \frac{V_A \cdot x - \frac{p \cdot x^2}{2}}{\sigma_a} = \frac{\pi \cdot d_x^3}{32} \qquad 7.6\text{-}18$$

Din relația 7.6-18, rezultă legea de variație a diametrului în lungul grinzii:

$$d_x = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot \left(V_A \cdot x - \frac{p \cdot x^2}{2} \right)}{\pi \cdot \sigma_a}} \qquad 7.6\text{-}19$$

Diametrul grinzii variază în lungul acesteia (dar numai până la mijlocul deschiderii, datorită simetriei) după o parabolă cubică (Fig.7.6-4b).

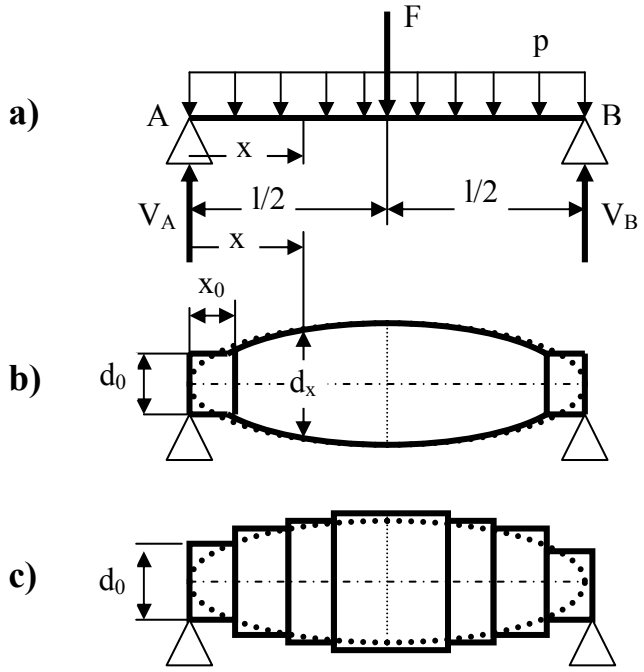


Fig.7.6-4

Din condiția de rezistență la forfecare în reazeme, se determină diametrul minim d_0 (Fig.7.6-4b,c):

$$\tau_{max} = \frac{4}{3} \cdot \frac{T}{A} = \frac{4}{3} \cdot \frac{V_A}{\frac{\pi \cdot d_0^2}{4}} = \tau_a \;\Rightarrow\; d_0 = 4 \cdot \sqrt{\frac{V_A}{3 \cdot \pi \cdot \tau_a}} \qquad 7.6\text{-}20$$

Diametrul maxim se obține din relația 7.6-19, pentru x = l/2:

$$d_{max} = d_{x=\frac{l}{2}} = \sqrt[3]{\frac{4 \cdot l \cdot (4 \cdot V_A - p \cdot l)}{\pi \cdot \sigma_a}} \qquad 7.6\text{-}21$$

Lungimea x_0 pe care se adoptă diametrul minim d_0, se determină din condiția de egală rezistență la încovoiere:

$$\frac{\pi \cdot d_0^3}{32} = \frac{V_A \cdot x_0 - \frac{p \cdot x_0^2}{2}}{\sigma_a} \Rightarrow x_0 = ... \qquad 7.6\text{-}22$$

Realizarea unui profil care rezultă din relația 7.6-19, practic este deosebit de greu de realizat. Din acest motiv, astfel de grinzi de egală rezistență se realizează cu secțiune variabilă în trepte (Fig.7.6-4c), care să se apropie cât mai mult de profilul real. Apropierea de profilul real implică un număr mare de tronsoane, ceea ce conduce la un consum ridicat de manoperă.

Din exemplu prezentat, pot rezulta două cazuri particulare:

- când F = 0, se obține grinda încărcată cu p = const.
- când p = 0, se obține grinda încărcată cu o forță F concentrată.

În ambele cazuri, legile de variație ale diametrului grinzii în lungul acesteia, rezultă din relația 7.6-19, particularizată pentru cele două situații.

7.7 ÎNCOVOIEREA OBLICĂ A BARELOR DREPTE

Dacă forțele exterioare nu sunt situate toate într-un plan principal de inerție al secțiunii transversale, atunci vectorul momentului încovoietor nu se află pe una din direcțiile centrale principale de inerție.

Solicitarea de încovoiere la care vectorul moment încovoietor nu este situat pe o direcție principală de inerție, este o *solicitare de încovoiere oblică.* La încovoierea oblică, vectorul moment încovoietor face cu axele centrale principale de inerție un unghi α.

Încovoierea oblică se întâlnește în multe situații:

- în cazul unei bare solicitate de forțe exterioare atât în plan orizontal cât şi în plan vertical (Fig.7.7-1a). La aceste bare, diagrama de momente încovoietoare are componente în plan orizontal M_{iy} şi în plan vertical M_{iz}
- la profilele la care direcțiile principale de inerție nu coincid cu planul forțelor (Fig.7.7-1b).

Fie o secțiune de formă dreptunghiulară (Fig.7.7-1a), la care direcțiile principale de inerție coincid cu direcțiile centrale Gz şi Gy (Fig.7.7-2).

Direcția momentului încovoietor M_i din secțiunea transversală a grinzii nu coincide cu nici una din direcțiile principale de inerție.

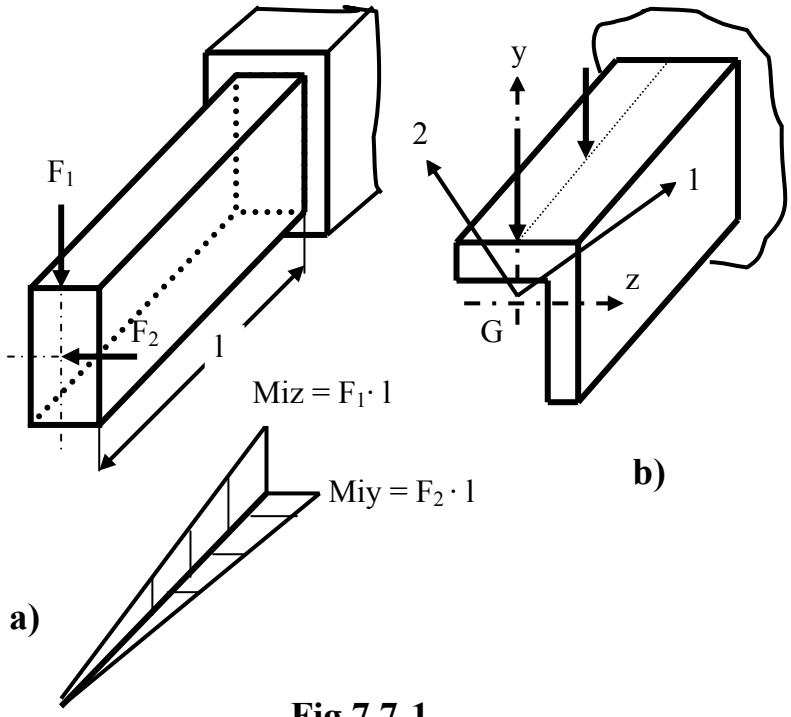


Fig.7.7-1

Momentul încovoietor M_i se descompune în două componente orientate pe direcțiile principale de inerție:

$$M_{iz} = M_i \cdot \cos\alpha \quad ; \quad M_{iy} = M_i \cdot \sin\alpha \qquad 7.7\text{-}1$$

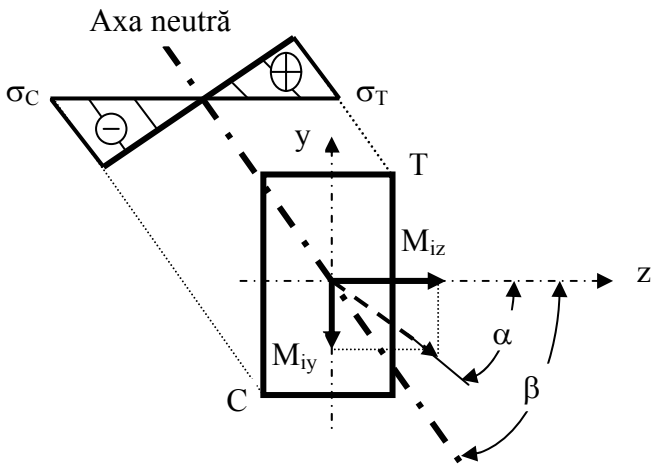


Fig.7.7-2

Cele două momente încovoietoare, produc într-un punct al secțiunii, tensiunile:

$$\sigma' = \pm \frac{M_{iz}}{I_z} \cdot y = \pm \frac{M_i \cdot \cos\alpha}{I_z} \cdot y$$
$$\sigma'' = \pm \frac{M_{iy}}{I_y} \cdot z = \pm \frac{M_{iy} \cdot \sin\alpha}{I_y} \cdot z \qquad 7.7\text{-}2$$

În relația 7.7-2 s-a pus semnul ±, deoarece într-un punct oarecare al secțiunii, cele două momente încovoietoare pot produce tensiuni normale de întindere sau de compresiune.

Aceste tensiuni, fiind normale la secțiunea barei şi având aceeaşi direcție, dau o tensiune normală rezultantă:

$$\sigma_{rez} = \sigma' + \sigma'' = M_i \cdot \left(\pm \frac{\cos\alpha \cdot y}{I_z} \pm \frac{\sin\alpha \cdot z}{I_y} \right) = \pm \frac{M_{iz}}{I_z} \cdot y \pm \frac{M_{iy}}{I_y} \cdot z \qquad 7.7\text{-}3$$

Din relația 7.7-3, rezultă că tensiunea normală rezultantă la încovoierea oblică variază liniar pe secțiune. Analizând diagramele de momente (care sunt reprezentate pe fibra întinsă) rezultă că punctul T este cel mai întins, iar punctul C, cel mai comprimat (Fig.7.7-2).

Pentru calculul tensiunii normale rezultante într-un punct, în relația 7.7-3 se pune semnul + sau – în funcție de ce efect are în acel punct momentul încovoietor respectiv.

Ecuația axei neutre, rezultă din relația 7.7-3, punând condiția ca $\sigma_{rez} = 0$:

$$\frac{M_{iz}}{I_z} \cdot y_0 + \frac{M_{iy}}{I_y} \cdot z_0 = 0 \qquad 7.7\text{-}4$$

unde:

z_0, y_0 – reprezintă coordonatele unui punct situat pe axa neutră.

Axa neutră la încovoierea oblică este o dreaptă care trece prin centrul de greutate al secțiunii. Scriind sub altă formă relația 7.7-4, se obține:

$$\frac{M_{iz}}{I_z} \cdot y_0 = -\frac{M_{iy}}{I_y} \cdot z_0 \;\Rightarrow\; \frac{M_{iy}}{M_{iz}} = -\frac{I_y}{I_z} \cdot \frac{y_0}{z_0} \Rightarrow tg\alpha = -\frac{I_y}{I_z} \cdot tg\beta \qquad 7.7\text{-}5$$

unde:

α - unghiul format de momentul încovoietor M_i cu axa principală Gz

β - unghiul format de axa neutră cu axa principală Gz.

Din relația 7.7-5, se deduce expresia care dă valoarea unghiului β:

$$\mathrm{tg}\beta = -\frac{I_z}{I_y}\cdot \mathrm{tg}\alpha \quad \Rightarrow \quad |\beta| = \mathrm{arctg}\left(-\frac{I_z}{I_y}\cdot \mathrm{tg}\alpha\right) = \mathrm{arctg}\left(-\frac{I_z}{I_y}\cdot\frac{M_{iy}}{M_{iz}}\right) \qquad 7.7\text{-}6$$

Dacă $I_z = I_y$, , rezultă $\alpha = |\beta|$, adică axa neutră se suprapune peste direcția momentului încovoietor M_i. Această constatare, permite o determinare simplă a tensiunii normale maxime pentru secțiuni circulare, unde tensiunea maximă se obține în punctele cele mai depărtate de axa neutră, dar şi cele mai depărtate de direcția momentului încovoietor M_i:

$$\sigma_{max} = \frac{M_i}{W_z} = \frac{\sqrt{M_{iz}^2 + M_{iy}^2}}{W_z} \qquad 7.7\text{-}7$$

Pentru secțiunile la care $I_z > I_y$, se obține $|\beta| > \alpha$.

Variația tensiunii normale din secțiunea dreptunghiulară a barei din Fig.7.7-1a, este prezentată în Fig.7.7-2.

7.8 TENSIUNI ÎN BARE CURBE PLANE SOLICITATE LA ÎNCOVOIERE PURĂ

În secțiunea transversală a unei bare curbe plane, se întâlnesc în general toate cele trei eforturi: N, T, M_i. Tensiunea normală produsă de efortul axial N este uniformă pe secțiune şi se poate calcula cu relația cunoscută de la barele drepte ($\sigma = N / A$), iar cea tangențială produsă de efortul tăietor T, se poate neglija sau se poate calcula cu relația lui Juravski utilizată în cazul barelor drepte cu grosime mare.

Calculul tensiunii normale produse de momentul încovoietor în barele curbe plane, se face acceptând următoarele ipoteze:

- axa barei este o curbă plană, iar bara este solicitată prin forțe conținute în planul său
- este valabilă legea lui Hooke
- planul forțelor este un plan de simetrie al barei, cu axa Gy axă de simetrie a secțiunii barei
- momentul încovoietor M_i este orientat după direcția principală Gz.

Pentru bara cu curbură mică (rază de curbură mare), având raportul dintre raza de curbură R şi înălțimea secțiunii h (măsurată pe direcție radială) mai mare decât 5 ... 6, tensiunile normale σ produse de momentul încovoietor M_i, se pot calcula cu relația lui Navier, de la barele drepte.

Relația lui Navier conduce la erori cu atât mai mari, cu cât curbura barei este mai mare (rază de curbură mică). Dacă raportul R / h < 5 ... 6, relația lui Navier nu este satisfăcătoare, fiind nevoie de o altă relație pentru calculul tensiunii normale la încovoiere pură.

În literatura de specialitate se utilizează în general două relații pentru calculul tensiunii normale în bare curbe plane cu curbură mare, solicitate la încovoiere pură:

- relația lui Winkler
- relația lui Toll.

Pentru deducerea relației lui Winkler, se ia un element de bară cu unghiul la centru dφ (Fig.7.8-1a) delimitat de două secțiuni plane *ab* şi *cd*, solicitat la încovoiere pură de către momentul încovoietor $M_i \equiv M_{iz}$.

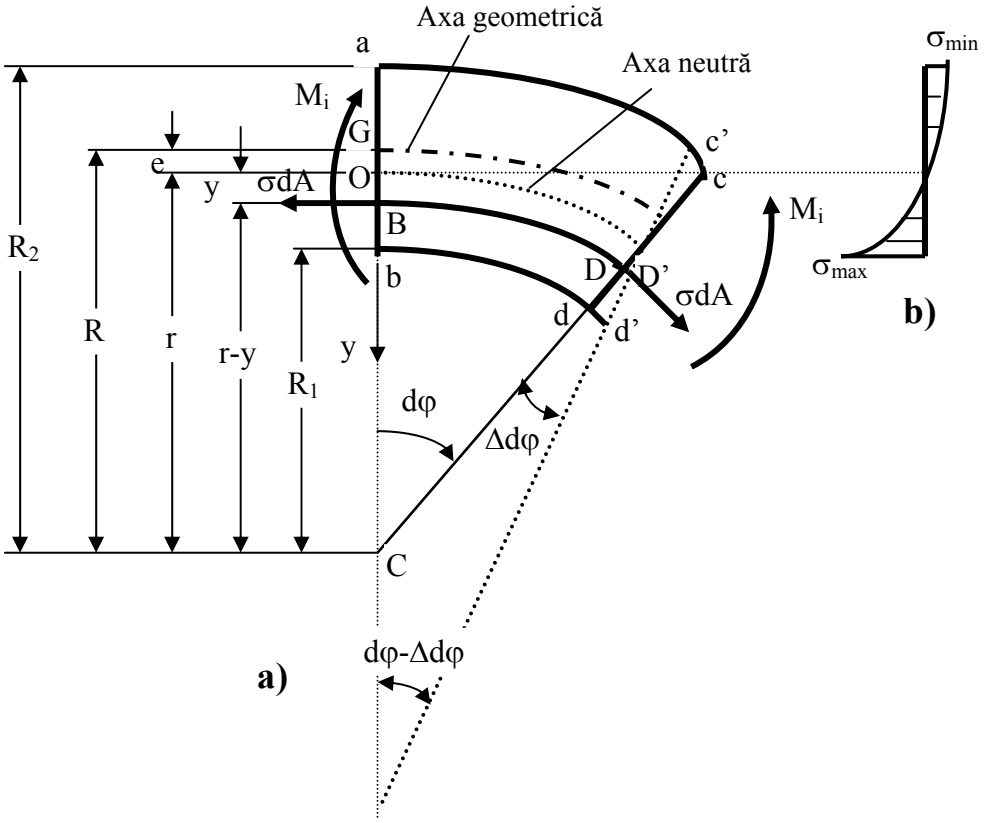


Fig.7.8-1

Notațiile din Fig.7.8-1 au următoarea semnificație:

- R_1, R_2 – razele extreme (interioară, respectiv exterioară) ale barei curbe
- R – raza de curbură a axei geometrice pe care este situat şi centrul de greutate G al secțiunii transversale
- r – raza de curbură a axei neutre

- BD – o fibră oarecare situată la distanța *y* de axa neutră, în care se calculează tensiunea normală σ. Distanța *y* este pozitivă pentru punctele situate față de axa neutră spre interiorul barei curbe (spre centul de curbură C)
- e – (excentricitatea) distanța dintre axa geometrică şi cea neutră
- M_i – momentul încovoietor din secțiunea transversală. El se consideră pozitiv, dacă întinde fibrele din interiorul barei curbe.

Datorită solicitării la încovoiere pură de către momentul încovoietor M_i, elementul izolat se deformează, fibrele dinspre centrul de curbură (din interior) se lungesc (solicitate la întindere), iar cele dinspre exterior, se scurtează (sunt comprimate). Presupunând secțiunea *ab* fixă, în urma solicitării, secțiunea *cd* se roteşte în raport cu *ab* cu unghiul Δdφ, ajungând în poziția *c'd'*. Atunci, fibra BD se lungeşte ajungând în D'.

Înainte de deformare, fibra BD a avut lungimea:

$$ds = \text{arc}\,BD = (r - y)\cdot d\varphi \qquad 7.8\text{-}1$$

iar lungirea ei este:

$$\Delta ds = DD' = y \cdot \Delta d\varphi \qquad 7{,}8\text{-}2$$

Lungirea specifică (alungirea) fibrei este:

$$\varepsilon = \frac{\Delta d\varphi}{ds} = \frac{y}{r-y}\cdot\frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} \qquad 7.8\text{-}3$$

Fiind valabilă legea lui Hooke, expresia tensiunii normale este:

$$\sigma = E\cdot\varepsilon = \frac{y}{r-y}\cdot\frac{E\cdot\Delta d\varphi}{d\varphi} \qquad 7.8\text{-}4$$

Deoarece în relația 7.8-4, mărimile E, Δdφ şi dφ sunt constante, rezultă că tensiunea normală *variază pe secțiune după o lege hiperbolică* (Fig.7.8-1b). Este maximă spre interior unde *y* are valoarea cea mai mare, zero în axa neutră şi minimă spre exterior.

Poziția axei neutre față de care s-a poziționat fibra la care se calculează tensiunea normală, se determină din relația de echivalență care există între efortul axial şi care în acest caz este nul şi tensiunea normală:

$$N = \int_A \sigma\cdot dA = \int_A \frac{E\cdot\Delta d\varphi}{d\varphi}\cdot\frac{y}{r-y}\cdot dA = \frac{E\cdot\Delta d\varphi}{d\varphi}\cdot\int_A \frac{y}{r-y}\cdot dA = 0 \qquad 7.8\text{-}5$$

de unde rezultă:

$$\int_A \frac{y}{r-y} \cdot dA = 0 \qquad 7.8\text{-}6$$

Rezolvând relația 7.8-6 se obține raza de curbură *r* a axei neutre.

Relația de echivalență dintre momentul încovoietor M_i şi tensiunea normală σ, este:

$$M_i = \int_A y \cdot \sigma \cdot dA = \frac{E \cdot \Delta d\varphi}{d\varphi} \cdot \int_A \frac{y^2}{r-y} \cdot dA \qquad 7.8\text{-}7$$

Integrala din relația 7.8-7, după rezolvare devine de forma:

$$\int_A \frac{y^2}{r-y} = -\int_A \left(y - \frac{r \cdot y}{r-y} \right) \cdot dA = -\int_A y \cdot dA + r \cdot \int_A \frac{y}{r-y} \cdot dA \qquad 7.8\text{-}8$$

Ținând seama de relația 7.8-6, relația 7.8-8, devine:

$$\int_A \frac{y^2}{r-y} \cdot dA = -\int_A y \cdot dA = -y_G \cdot A \qquad 7.8\text{-}9$$

Cum y_G = -e, relația 7.8-9 are forma:

$$\int_A \frac{y^2}{r-y} \cdot dA = -y_G \cdot A = A \cdot e \qquad 7.8\text{-}10$$

Înlocuind relația 7.8-10 în relația 7.8-7, rezultă:

$$M_i = \frac{E \cdot \Delta d\varphi}{d\varphi} \cdot A \cdot e \;\Rightarrow\; \frac{E \cdot \Delta d\varphi}{d\varphi} = \frac{M_i}{A \cdot e} \qquad 7.8\text{-}11$$

Ținând seama de relația 7.8-11, relația 7.8-4, devine:

$$\sigma = \frac{M_i}{A \cdot e} \cdot \frac{y}{r-y} \qquad 7.8\text{-}12$$

şi reprezintă *relația lui Winkler* pentru calculul tensiunii normale la o bară curbă plană solicitată la încovoiere pură.

În relația 7.8-12 atât momentul încovoietor M_i cât şi coordonata y intră cu semn. Atunci, relația lui Winkler sub o formă mai generală se poate scrie sub forma:

$$\sigma = \frac{\pm M_i}{A \cdot e} \cdot \frac{\pm y}{r - (\pm y)} \qquad 7.8\text{-}13$$

Convenția de semne pozitive pentru aceste mărimi, a fost prezentată ceva mai devreme.

În fibrele extreme, tensiunea normală, calculată pe baza relației 7.8-12 sau 7.8-13, este:

$$\sigma_{max} = \sigma_{int} = \frac{M_i}{A \cdot e} \cdot \frac{d_1}{R_1} \qquad 7.8\text{-}14$$

$$\sigma_{min} = \sigma_{ext} = -\frac{M_i}{A \cdot e} \cdot \frac{d_2}{R_2} \qquad 7.8\text{-}15$$

unde, d_1, d_2 reprezintă distanța în valoare absolută dintre axa neutră şi fibrele extreme interioare, respectiv extreme exterioare.

În relația 7.8-13 nu este cunoscută poziția axei neutre (mărimea r) şi de aici nici excentricitatea *e*, care se obține din relația:

$$e = R - r \qquad 7.8\text{-}16$$

Dacă se ține seama şi de efortul axial, atunci tensiunea normală rezultantă este:

$$\sigma = \pm\frac{N}{A} + \frac{\pm M_i}{A \cdot e} \cdot \frac{\pm y}{r - (\pm y)} \qquad 7.8\text{-}17$$

iar în fibrele extreme

$$\begin{aligned} \sigma_{max} &= \pm\frac{N}{A} \pm \frac{M_i}{A \cdot e} \cdot \frac{d_1}{R_1} \\ \sigma_{min} &= \pm\frac{N}{A} \pm \frac{M_i}{A \cdot e} \cdot \frac{d_2}{R_2} \end{aligned} \qquad 7.8\text{-}18$$

În mod asemănător se poate determina tensiunea normală în orice punct k din secțiune:

$$\sigma_k = \pm\frac{N}{A} \pm \frac{M_i}{A \cdot e} \cdot \frac{y_k}{r_k} \qquad 7.8\text{-}19$$

unde

r_k – este distanța de la centrul de curbură la punctul k (raza de curbură a fibrei care conține punctul k). În relația 7.8-19 se ia semnul + dacă eforturile produc tensiuni de întindere în punctul k, respectiv semnul –, dacă produc tensiuni de compresiune. Toate celelalte mărimi se iau în valoare absolută.

Poziția axei neutre se determină pe baza relației 7.8-6, pentru fiecare secțiune în parte.

Pentru secțiunea dreptunghiulară (Fig.7.8-2), se poate scrie:

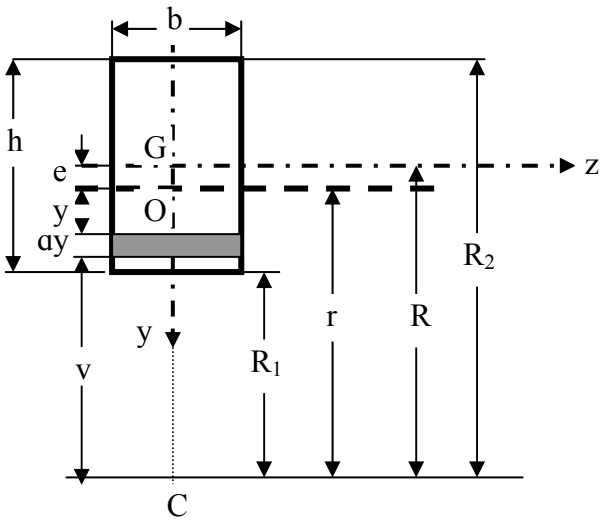


Fig.7.8-2

$$dA = b\,dy$$

Se face o schimbare de variabilă, înlocuind pe y cu v:

$$v = r - y \qquad \Rightarrow \qquad y = r - v$$

Cu aceste notații, integrala din relația 8.7-6, devine:

$$\int_A \frac{y}{r-y} \cdot dA = \int_A \frac{r-v}{v} \cdot dA = \int_A \frac{r}{v} \cdot dA - \int_A dA = 0$$

Rezultă mai departe:

$$\int_A \frac{r}{v}\cdot dA - \int_A dA = \int_A \frac{r}{v}\cdot dA - A = 0 \;\Rightarrow\; A = r\int_A \frac{dA}{v}$$

$$\Rightarrow \quad r = \frac{A}{\int_A \frac{dA}{v}} = \frac{b\cdot h}{\int_{R_1}^{R_2} \frac{b\cdot dv}{v}} = \frac{h}{\int_{R_1}^{R_2} \frac{dv}{v}} = \frac{h}{\ln\frac{R_2}{R_1}}$$

S-a obținut pentru poziția axei neutre la secțiuni dreptunghiulare, relația:

$$r = \frac{h}{\ln\frac{R_2}{R_1}} \qquad 7.8\text{-}20$$

iar pentru excentricitate

$$e = R - r = R - \frac{h}{\ln\frac{R_2}{R_1}}$$

Dacă numitorul relației 7.8-20 se dezvoltă în serie

$$\ln\frac{R_2}{R_1} = \ln\frac{R+\frac{h}{2}}{R-\frac{h}{2}} = \ln\frac{1+\frac{h}{2\cdot R}}{1-\frac{h}{2\cdot R}} = \frac{h}{R}\cdot\left[1+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{h}{2\cdot R}\right)^2+\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{h}{2\cdot R}\right)^4+\ldots\right]$$

şi se iau numai primii doi termeni, se obține pentru poziția axei neutre:

$$r \approx \frac{h}{\frac{h}{R}\cdot\left[1+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{h}{2\cdot R}\right)^2\right]} = \frac{R}{1+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{h}{2\cdot R}\right)^2} \qquad 7.8\text{-}21$$

şi a excentricității e:

$$e = R - r = R - \frac{R}{1+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{h}{2\cdot R}\right)^2} \approx \frac{h^2}{12\cdot R} = \frac{I_z}{A\cdot R} \qquad 7.8\text{-}22$$

Relația 7.8-22 de calcul aproximativ a excentricității *e*, se poate utiliza cu rezultate destul de bune, mai ales atunci când pentru suprafața respectivă nu se dispune de relația exactă pentru determinarea poziției axei neutre. Pe baza relației 7.8-22, se determină poziția axei neutre:

$$r = R - e \qquad 7.8\text{-}23$$

Valorile pentru *r* şi *e,* trebuie calculate cu precizie de până la trei zecimale, altfel se pot obține rezultate mult neconforme cu realitatea.

În literatura de specialitate se recomandă în general relațiile exacte pentru poziția axei neutre.

Pentru o secțiune compusă formată din mai multe secțiuni dreptunghiulare (Fig.7.8-3), relația exactă pentru poziția axei neutre, este:

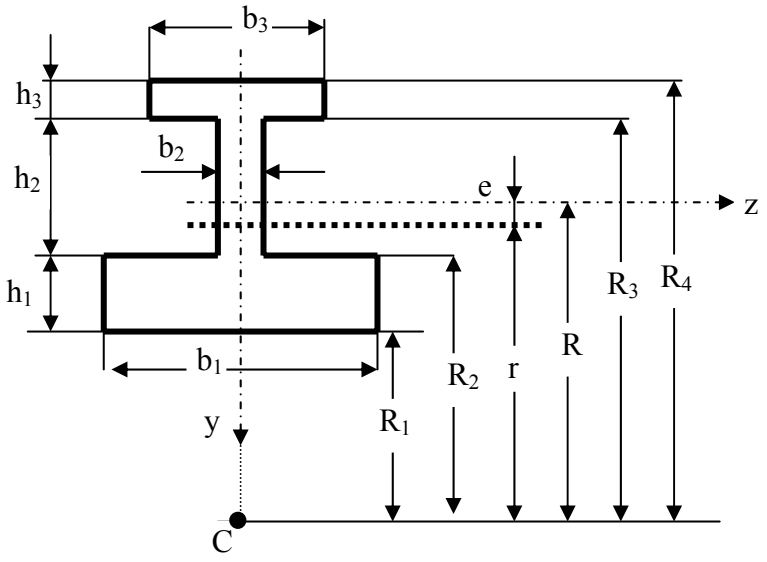


Fig.7.8-3

$$r = \frac{b_1 \cdot h_1 + b_2 \cdot h_2 + b_3 \cdot h_3}{b_1 \cdot \ln\frac{R_2}{R_1} + b_2 \cdot \ln\frac{R_3}{R_2} + b_3 \cdot \ln\frac{R_4}{R_3}}$$

7.9 APLICAȚII LA SOLICITAREA DE ÎNCOVOIERE

Aplicația nr.1. *Pentru grinda din Fig.7.9-1a, se cere:*
a) valoarea dimensiunii t, astfel încât tensiunea normală maximă să nu depăşească σ_a *= 150 MPa*
b) calculul şi reprezentarea variației tensiunii normale σ *şi a celei tangențiale* τ *în secțiunea din dreptul reazemului B.*

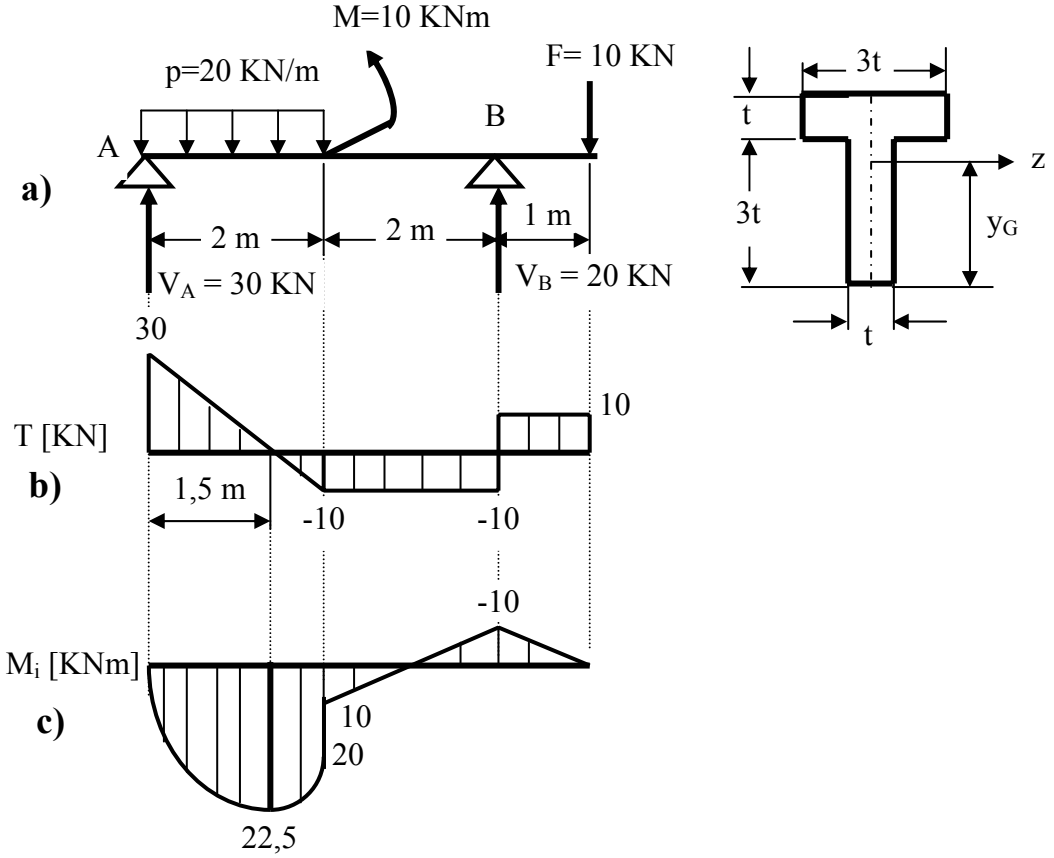


Fig.7.9-1

a) Calculul reacțiunilor a condus la următoarele valori :

V_A = 30 KN, V_B = 20 KN.

Pentru a putea face calculul de rezistență, se trasează diagramele de eforturi. Acestea sunt prezentate în Fig.7.9-1b,c. La încovoiere, secțiunea periculoasă este la distanța de 1,5 m de reazemul din stânga (reazemul A), iar la forfecare, secțiunea periculoasă este pe reazemul A.

Calculul caracteristicilor geometrice ale secțiunii transversale, conduc la poziția centrului de greutate al secțiunii y_G = 2,5t şi la:

$I_z = 8{,}5\ t^4$

$W_{z,min} = 3{,}4\ t^3$.

Dimensionarea secțiunii transversale a grinzii se face numai din condiția de rezistență la încovoiere. De altfel, pentru forfecare nici nu s-a specificat tensiunea admisibilă, τ_a.

Condiția de rezistență la încovoiere pentru probleme de dimensionare este:

$$W_{z,min} = \frac{M_{iz,max}}{\sigma_a} = 3{,}4\,t^3$$

de unde se obține.

$$t = \sqrt[3]{\frac{M_{iz,max}}{3{,}4 \cdot \sigma_a}} = \sqrt[3]{\frac{22{,}5 \cdot 10^6}{3{,}4 \cdot 150}} \cong 36 \quad \text{mm}$$

b) Cu t = 36 mm, rezultă $I_z \cong 1427{,}67\ cm^4$.

Pentru secțiunea de pe reazemul B, tensiunile normale extreme, sunt:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{iz,B}}{I_z} \cdot y_{max} = -\frac{10 \cdot 10^6}{1247{,}67 \cdot 10^4} \cdot 2{,}5 \cdot 36 \cong -63 \ \ MPa$$

$$\sigma_{min} = -\frac{M_{iz,B}}{I_z} \cdot y_{min} = \frac{10 \cdot 10^6}{1247{,}67 \cdot 10^4} \cdot 1{,}5 \cdot 36 = 43{,}28 \ \ MPa$$

Diagrama de variație a tensiunii normale în secțiunea B, este prezentată în Fig.7.9-2a.

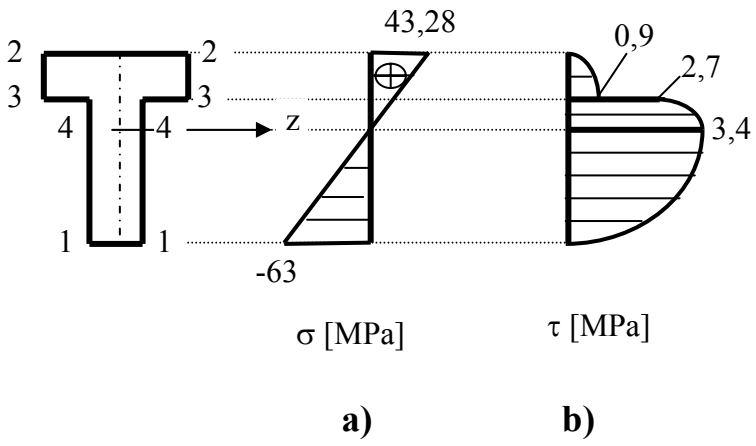


Fig.7.9-2

La nivelul punctelor extreme 1-1 şi 2-2 tensiunea tangențială este nulă:

$$\tau_{1\text{-}1} = \tau_{2\text{-}2} = 0$$

La nivelul 3-3 există un salt, deoarece se modifică lățimea *b* a secțiunii. Pentru punctele 3-3 care aparțin tălpii, tensiunea tangențială este:

$$\tau_{3-3\,\min} = \frac{T_b \cdot S_{z,3-3}}{I_z \cdot b_{3-3}} = \frac{10 \cdot 10^3}{1427{,}67 \cdot 10^4} \cdot \frac{3 \cdot 36 \cdot 36 \cdot 36}{3 \cdot 36} = 0{,}9 \ \text{MPa}$$

iar pentru cele care aparțin inimii (lățimea *b* scade de trei ori):

$$\tau_{3-3\,\max} = 3 \cdot \tau_{3-3\,\min} = 3 \cdot 0{,}9 = 2{,}7 \ \text{MPa}$$

Tensiunea tangențială are valoare maximă la nivelul axei neutre (nivelul punctelor 4-4).

$$\tau_{\max} = \tau_{4-4} = \frac{10 \cdot 10^3}{1427{,}67 \cdot 10^4} \cdot \frac{2{,}5 \cdot 36 \cdot 36 \cdot \frac{3 \cdot 36}{2}}{36} = 3{,}4 \ \text{MPa}$$

Diagrama de variație a tensiunii tangențiale din secțiunea B, este prezentată în Fig.7.9-2b.

Aplicația nr.2. *Pentru grinda înțepenită din Fig.7.9-3a, se cere:*

a) sarcina capabilă p pentru σ_a = 150 MPa

b) diagrama de variație şi tensiunea tangențială maximă.

a) Poziția centrului de greutate al secțiunii este cunoscută şi nu mai trebuie calculată.

Momentul de inerție față de axa de încovoiere se calculează relativ uşor:

$$I_z = \frac{150 \cdot 150^3}{12} - 4 \cdot \left(\frac{60 \cdot 60^3}{12} + 60 \cdot 60 \cdot 45^2 \right) = 870{,}75 \cdot 10^4 \ \text{mm}^4$$

iar modulul de rezistență minim, este:

$$W_{z,\min} = \frac{I_z}{y_{\max}} = \frac{870{,}75 \cdot 10^4}{75} = 116{,}1 \cdot 10^3 \ \text{mm}^3$$

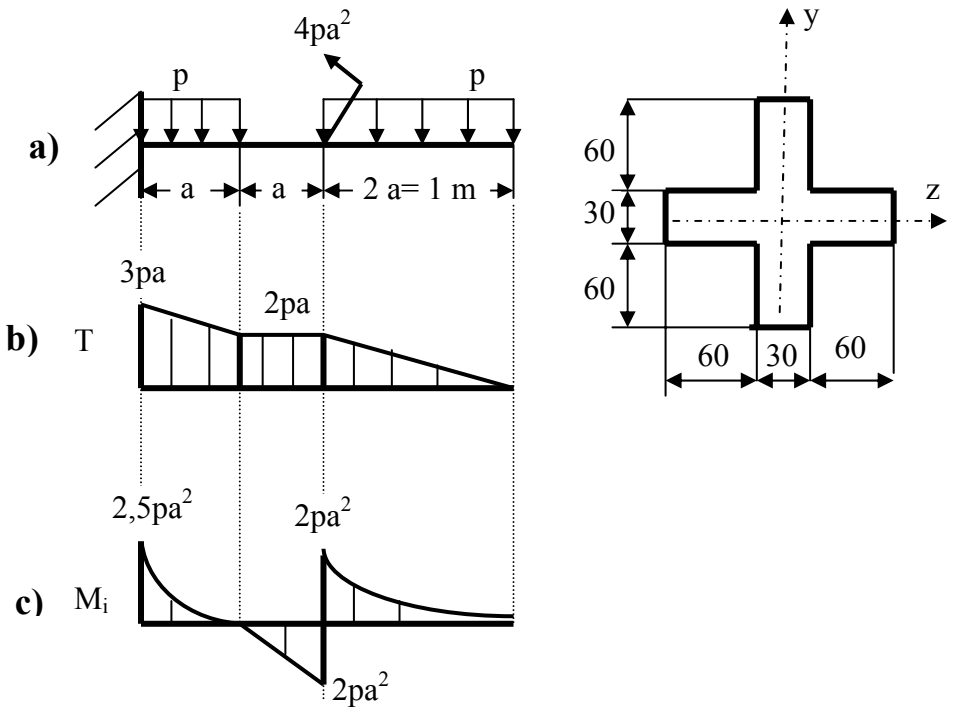


Fig.7.9-3

Diagramele de eforturi sunt prezentate în Fig.7.9-3b,c. Atât pentru încovoiere cât şi pentru forfecare, secțiunea periculoasă este cea din înțepenire.

Efortul capabil se determină din condiția de rezistență la încovoiere. Pentru problema de efort capabil, condiția de rezistență la încovoiere este:

$$M_{i,cap} = \sigma_a \cdot W_{z,min} = 2{,}5pa^2$$

de unde se obține pentru sarcina capabilă:

$$p_{cap} = p = \frac{\sigma_a \cdot W_{z,min}}{2{,}5 \cdot a^2} = \frac{150 \cdot 116{,}1 \cdot 10^3}{2{,}5 \cdot 500^2} = 27{,}86 \ \ KN/m$$

b) Tensiunea tangențială trebuie calculată la nivelul modificării lățimii (nivelul punctelor 1-1, Fig.7.9-4), precum şi la nivelul axei neutre (nivelul punctelor 2-2). La nivelul punctelor 1-1 secțiunea are două lățimi şi ca urmare există două valori pentru tensiunea tangențială:

$$\tau_{1-1,max} = \frac{T}{I_z} \cdot \frac{S_{z,1-1}}{b_{1-1,min}} = \frac{3 \cdot p \cdot a}{870{,}75 \cdot 10^4} \cdot \frac{30 \cdot 60 \cdot 45}{30} = 12{,}96 \ \ MPa$$

$$\tau_{1-1,\min} = \frac{T}{I_z} \cdot \frac{S_{z,1-1}}{b_{1-1,\max}} = \frac{3 \cdot p \cdot a}{870{,}75 \cdot 10^4} \cdot \frac{30 \cdot 60 \cdot 45}{150} = 2{,}59 \text{ MPa}$$

Tensiunea tangențială de la nivelul axei neutre, este:

$$\tau_{\max} = \tau_{2-2} = \frac{T}{I_z} \cdot \frac{S_{z,2-2}}{b_{2-2}} = \frac{3 \cdot p \cdot a}{870{,}75 \cdot 10^4} \cdot \frac{30 \cdot 60 \cdot 45 + 150 \cdot 15 \cdot 7{,}5}{150} = 2{,}8 \text{ MPa}$$

Diagrama de variație a tensiunii tangențiale este prezentată în Fig.7.9-4.

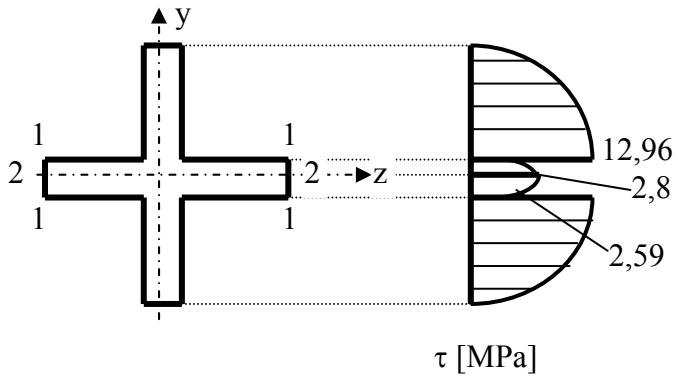


Fig.7.9-4

La această secțiune, valoarea maximă a tensiunii tangențiale nu este la nivelul axei neutre. La nivelul axei neutre, tensiunea tangențială prezintă doar un extrem.

Tensiunea tangențială pentru secțiunea prezentată, s-a calculat datorită simetriei secțiunii, numai pentru o jumătate de secțiune, cealaltă fiind identică.

Aplicația nr.3. *Pentru grinda din Fig.7.9-5a, se cere:*

*a) valoarea dimensiunii **a**, pentru σ_a = 150 MPa*

*b) cu valoarea lui **a** astfel determinată, să se calculeze şi să se reprezinte tensiunile σ şi τ din secțiunea n-n.*

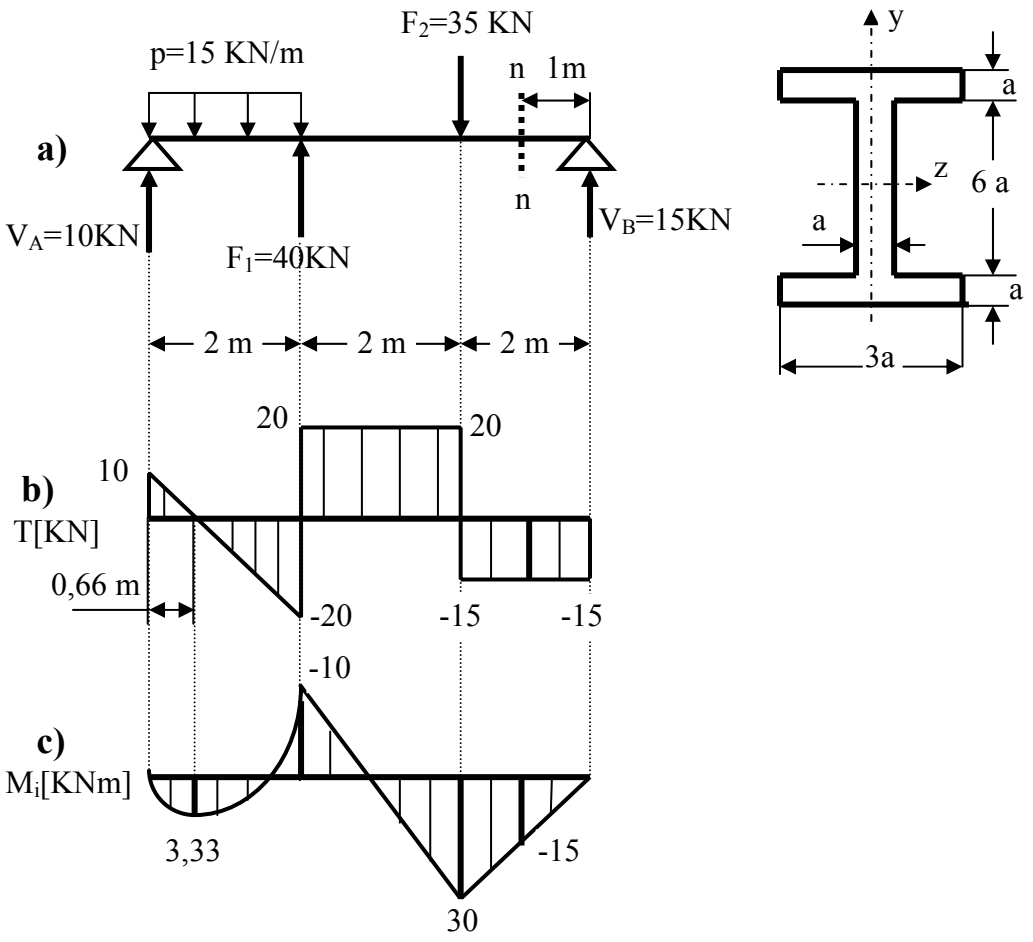


Fig.7.9-5

a) Pentru secțiunea grinzii, rezultă următoarele caracteristici geometrice:

$$I_z = 55{,}25\ a^4$$
$$W_{z,min} = 13{,}81\ a^3$$

Pentru încovoiere secțiunea periculoasă este secțiunea în care acționează F_2, iar pentru forfecare, intervalul dintre forțele F_1 şi F_2.

Condiția de rezistență la încovoiere, pentru probleme de dimensionare, este:

$$W_{z,min} = \frac{M_{iz,max}}{\sigma_a} = 13{,}81\ a^3$$

de unde se obține:

$$a = \sqrt[3]{\frac{M_{iz,max}}{13{,}81 \cdot \sigma_a}} = \sqrt[3]{\frac{30 \cdot 10^6}{13{,}81 \cdot 150}} \cong 25\ \text{mm}$$

Cu această valoare pentru dimensiunea *a*, celelalte caracteristici geometrice sunt:

$$I_y = 2158 \cdot 10^4\ \text{mm}^4$$
$$W_{z,min} = 215{,}78 \cdot 10^4\ \text{mm}^3.$$

b) Pentru această secțiune, fiind dublu simetrică, tensiunile se vor calcula numai pentru o jumătate de secțiune.

Tensiunea normală maximă din secțiunea *n-n*, este:

$$\sigma_{n-n,max} = \frac{M_{iz,n-n,max}}{W_{z,n-n,min}} = \frac{15 \cdot 10^6}{215{,}78 \cdot 10^4} \cong 69{,}5\ \text{MPa}$$

Diagrama de variație a tensiunii normale în secțiunea *n-n*, este prezentată în Fig.7.9-6a.

Tensiunea tangențială trebuie calculată la nivelul punctelor 1-1, unde datorită modificării lățimii secțiunii, prezintă două valori (minim şi maxim):

$$\tau_{1-1,min} = \frac{T_{n-n}}{I_z} \cdot \frac{S_{z,n-n}}{b_{n-n,1-1\,max}} = \frac{15 \cdot 10^3}{2158{,}2 \cdot 10^4} \cdot \frac{3a \cdot a \cdot 3{,}5a}{3a} = 1{,}5\ \text{MPa}$$

$$\tau_{1-1,max} = \frac{T_{n-n}}{I_z} \cdot \frac{S_{z,n-n,1-1}}{b_{n-n,1-1,min}} = \frac{15 \cdot 10^3}{2158{,}2 \cdot 10^4} \cdot \frac{3a \cdot a \cdot 3{,}5a}{a} = 3 \cdot \tau_{1-1,min} = 4{,}5\ \text{MPa}$$

$$\tau_{2-2} = \tau_{max} = \frac{T_{n-n}}{I_z} \cdot \frac{S_{z,n-n,2-2}}{b_{n-n,2-2}} = \frac{15 \cdot 10^3}{2158{,}2 \cdot 10^4} \cdot \frac{3a \cdot a \cdot 3{,}5a + a \cdot 3a \cdot 1{,}5a}{a} = 5{,}85\ \text{MPa}$$

Diagrama de variație a tensiunii tangențiale din secțiunea *n-n*, este prezentată în Fig.7.9-6b.

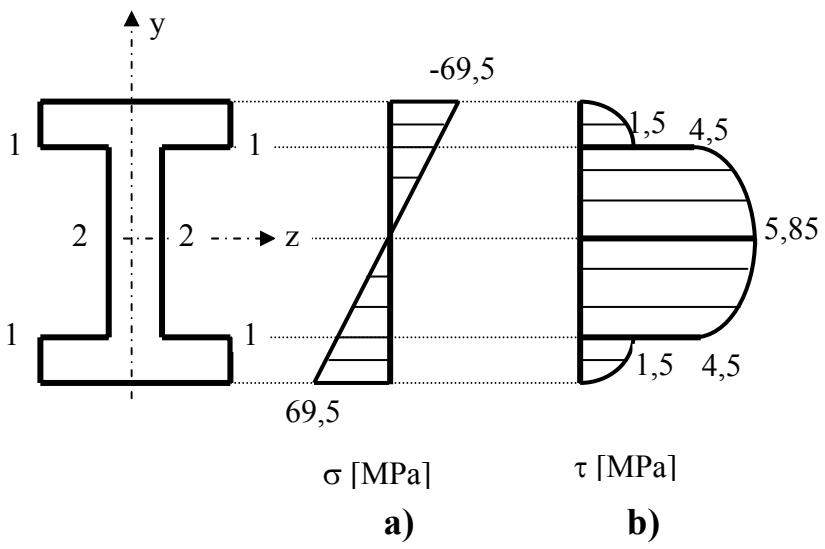


Fig.7.9-6

8. TORSIUNEA BARELOR DREPTE

Dacă în secțiunea transversală a unui element de rezistență există un singur efort şi acesta este momentul de torsiune (răsucire) M_t, se spune că în acea secțiune se realizează o *solicitare de torsiune (răsucire.*

8.1 MOMENTUL DE TORSIUNE (RĂSUCIRE)

Momentul de torsiune într-o secțiune transversală a unei bare este egal cu suma algebrică a momentelor tuturor forțelor exterioare şi a cuplurilor situate la stânga sau la dreapta secțiunii, în raport cu axa longitudinală a barei. Momentul de torsiune este un efort care apare cu prioritate în cazul arborilor care transmit puteri la diferite maşini. Din acest motiv, este necesar a se cunoaşte care este relația dintre momentul de torsiune şi puterea transmisă prin arbore.

Din fizică este cunoscută relația:

$$P = M_x \cdot \omega = M_t \cdot \omega \qquad 8.1\text{-}1$$

unde:

P – puterea transmisă

ω - viteza unghiulară a arborelui

Din relația 8.1-1 se obține expresia momentului de torsiune M_t, funcție de putere:

$$M_t[Nm] = \frac{P[W]}{\omega[rad/s]} = \frac{P[W]}{\frac{\pi \cdot n[rot/min]}{30}} = \frac{30}{\pi} \cdot \frac{P[W]}{n[rot/min]} = 9{,}55 \frac{P[W]}{n[rot/min]} \qquad 8.1\text{-}2$$

unde:

n – turația arborelui.

Dacă puterea P se exprimă în KW şi momentul de torsiune M_t în KNm, relația 8.1-2, devine:

$$M_t[KNm] = 9{,}55 \cdot \frac{P[KW]}{n[rot/min]} \qquad 8.1\text{-}3$$

În situația în care puterea se exprimă în CP (cai putere), ținând seama de relația care există între KW şi CP (1 CP = 736 W), relația dintre momentul de torsiune M_t şi puterea P, este:

$$M_t[KNm] = 7{,}02 \cdot \frac{P[CP]}{n[rot/min]} \qquad 8.1\text{-}4$$

8.2 TORSIUNEA BARELOR DE SECȚIUNE CIRCULARĂ

Se consideră o bară dreaptă de secțiune circulară constantă, solicitată de momentul de torsiune M_t (Fig.8.2-1a). Se acceptă următoarele ipoteze:

- materialul este omogen şi izotrop
- materialul este solicitat în domeniul valabilității legii lui Hooke.

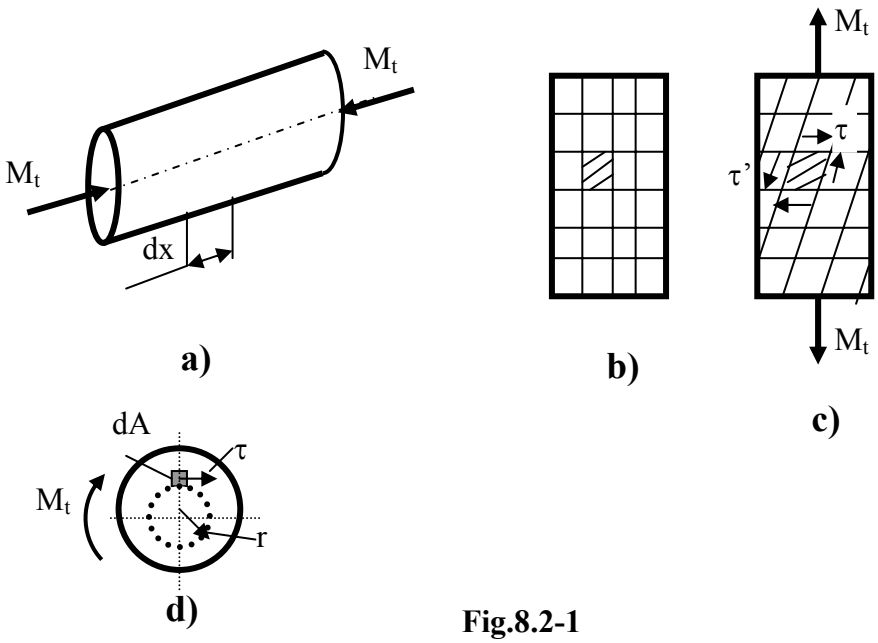


Fig.8.2-1

Pe bară se trasează un caroiaj (Fig.8.2-1b) şi apoi bara se solicită la torsiune. Dreptunghiurile inițiale ale caroiajului, au devenit paralelograme, ceea ce indică prezența unor tensiuni tangențiale τ, respectiv τ', care sunt tangente la conturul secțiunii (Fig.8.2-1c). Se mai poate constata că, cercurile caroiajului rămân plane şi perpendiculare pe axa barei, ceea ce confirmă valabilitatea ipotezei lui Bernoulli, iar generatoarele s-au transformat în arce de elice.

Aşadar, în planul secțiunii transversale, apar tensiuni tangențiale τ, perpendiculare pe rază la elementul de arie dA considerat (Fig.8.2-1d).

Din cele 6 relații diferențiale dintre eforturi şi tensiuni, pentru acest caz, se poate scrie una singură:

$$M_t = \int_A (\tau \cdot dA) \cdot r = \int_A \tau \cdot r \cdot dA \qquad 8.2\text{-}1$$

Legea de distribuție a tensiunii tangențiale pe secțiune, nu este însă cunoscută. Pentru studiul tensiunii tangențiale τ, din bara solicitată la torsiune, se izolează un element de lungime dx (Fig.8.2-2a).

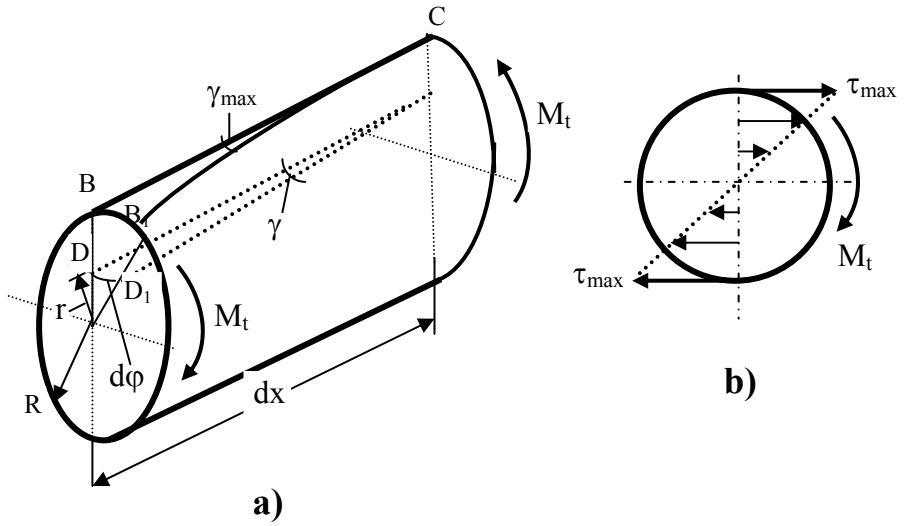


Fig.8.2-2

Din Fig.8.2-2a, se poate scrie:

$$BB_1 = R \cdot d\varphi \cong \gamma_{max} \cdot dx \qquad 8.2\text{-}2a$$

$$DD_1 = r \cdot d\varphi \cong \gamma \cdot dx \qquad 8.2\text{-}2b$$

Împărțind relația 8.2-2a la 8.2-2b, se obține:

$$\frac{\gamma_{max} \cdot dx}{\gamma \cdot dx} = \frac{R \cdot d\varphi}{r \cdot d\varphi} \Rightarrow \frac{\gamma_{max}}{\gamma} = \frac{R}{r} \Rightarrow \gamma = \frac{r}{R} \cdot \gamma_{max} \qquad 8.2\text{-}3$$

Deoarece este valabilă legea lui Hooke, se poate scrie:

$$\tau = \gamma \cdot G = \gamma_{max} \cdot \frac{r}{R} \cdot G = \tau_{max} \cdot \frac{r}{R} \qquad 8.2\text{-}4$$

Relația 8.2-4 arată că tensiunea tangențială la torsiune are o variație liniară, funcție de poziția punctului, poziție determinată de raza *r* (Fig.8.2-2b).

Scriind relația de echivalență dintre momentul de torsiune M_t şi tensiunea τ (relația 8.2-1), rezultă:

$$M_t = \int_A \tau \cdot r \cdot dA = \int_A \tau_{max} \cdot \frac{r}{R} \cdot r \cdot dA = \frac{\tau_{max}}{R} \cdot \int_A r^2 \cdot dA = \frac{\tau_{max}}{R} \cdot I_p \qquad 8.2\text{-}5$$

de unde:

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{I_p} \cdot R = \frac{M_t}{W_p} \qquad 8.2\text{-}6$$

Înlocuind relația 8.2-6 în relația 8.2-4, se obține expresia tensiunii tangențiale într-un punct al secțiunii transversale:

$$\tau = \tau_{max} \cdot \frac{r}{R} = \frac{M_t}{I_p} \cdot R \cdot \frac{r}{R} = \frac{M_t}{I_p} \cdot r \qquad 8.2\text{-}7$$

Deformarea barei solicitate la torsiune este o *răsucire* şi se exprimă prin *unghiul de răsucire* $\Delta\varphi$ *:*

$$\Delta\varphi = \int_0^l d\varphi = \int_0^l \frac{\tau}{G} \cdot \frac{1}{r} \cdot dx = \int_0^l \frac{1}{G \cdot r} \cdot \frac{M_t}{I_p} \cdot r \cdot dx = \frac{M_t}{G \cdot I_p} \cdot \int_0^l dx = \frac{M_t \cdot l}{G \cdot I_p} \qquad 8.2\text{-}8$$

Expresia GI_p constituie *rigiditatea la torsiune* a secțiunii barei.

G – modul de elasticitate transversal al materialului barei

Răsucirea specifică la torsiune, este:

$$\theta = \frac{\Delta\varphi}{l} = \frac{M_t}{G \cdot I_p} \qquad 8.2\text{-}9$$

Relația 8.2-8 reprezintă *răsucirea relativă* dintre două secțiuni aflate la distanța *l,* porțiune pe care acționează momentul de torsiune M_t, iar rigiditatea la torsiune a barei este GI_p. Dacă pe lungimea *l*, mărimile din relația 8.2-8 nu sunt constante, răsucirea relativă se calculează prin însumarea deformației de pe fiecare interval pe care aceste mărimi sunt constante.

La torsiune de obicei, calculul se efectuează atât din condiția de rezistență cât şi din cea de rigiditate. Pentru cele trei tipuri de problemă şi condițiile

impuse, relațiile de calcul la torsiune al barelor drepte de secțiune circulară, sunt:

❖ *probleme de verificare*

- condiția de rezistență

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{W_p} \leq \tau_a \qquad 8.2\text{-}10a$$

- condiția de rigiditate

$$\theta_{max} = \frac{M_t}{G \cdot I_p} \leq \theta_a \qquad 8.2\text{-}10b$$

❖ *probleme de dimensionare*

- condiția de rezistență

$$W_{p,nec} = \frac{M_t}{\tau_a} \qquad 8.2\text{-}11a$$

- condiția de rigiditate

$$I_{p,nec} = \frac{M_t}{G \cdot \theta_a} \qquad 8.2\text{-}11b$$

❖ *probleme de efort capabil*

- condiția de rezistență

$$M_{t,cap} = \tau_a \cdot W_p \qquad 8.2\text{-}12a$$

- condiția de rigiditate

$$M_{t,cap} = G \cdot I_p \cdot \theta_a \qquad 8.2\text{-}12b$$

8.3 TORSIUNEA BARELOR DREPTE DE SECȚIUNE DREPTUNGHIULARĂ

Torsiunea barelor drepte de secțiune transversală oarecare a fost studiată mai profund de către Barre de Saint Venant (1855). La barele de secțiune necirculară, ipoteza lui Bernouli nu se mai verifică. În cele ce urmează se vor prezenta numai câteva rezultate obținute pentru secțiuni dreptunghiulare.

În Fig.8.3-1 se prezintă o bară dreaptă de secțiune dreptunghiulară în două situații: înainte de solicitare (Fig.8.3-1a) şi după solicitare (Fig.8.3-1b). În starea nesolicitată, pe suprafața exterioară a barei s-a trasat un caroiaj care formează nişte dreptunghiuri. După solicitare, suprafețele dreptunghiulare ale caroiajului s-au deplanat (nu au mai rămas plane).

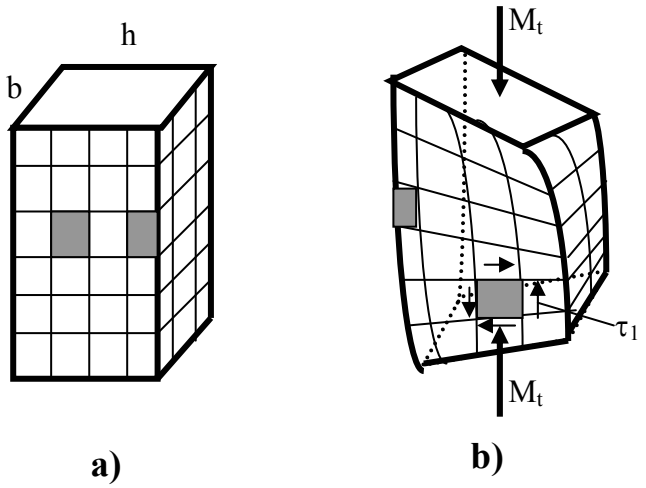


Fig.8.3-1

Pătrățelele situate la mijlocul laturii mai mari se deformează cel mai mult, ceea ce însemnă că aici tensiunile tangențiale au valorile cele mai mari. În schimb, pătrățelele situate în vecinătatea colțurilor secțiunii (muchiilor) îşi păstrează forma. Rezultă atunci că în dreptul acestora, tensiunea tangențială este nulă.

Diagrama de variație a tensiunii tangențiale la torsiune pentru o secțiune dreptunghiulară este prezentată în Fig.8.3-2.

Reprezentarea tensiunii tangențiale pentru o astfel de secțiune, impune utilizarea mai multor diagrame, pentru că valorile tensiunilor în fiecare punct al secțiunii, depind de ambele coordonate ale punctului. Pe axele de simetrie ale secțiunii, tensiunile sunt repartizate aproape liniar, prezentând valorile cele mai mari în punctele de pe conturul exterior. Pe laturile conturului însă, tensiunile tangențiale au o distribuție parabolică.

Valoarea maximă a tensiunii tangențiale se atinge la mijlocul laturii mari a dreptunghiului secțiunii şi are valoarea:

$$\tau_{max} = \tau_1 = \frac{M_t}{\alpha \cdot b^2 \cdot h} \qquad 8.3\text{-}1$$

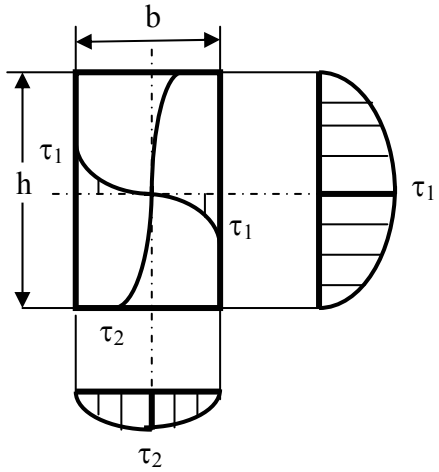


Fig.8.3-2

Tensiunea tangențială la mijlocul laturii mici, este:

$$\tau_2 = \frac{M_t}{\gamma \cdot b^2 \cdot h} = k \cdot \tau_1 \qquad 8.3\text{-}2$$

Unghiul de torsiune (răsucire) specific se determină cu relația:

$$\theta = \frac{M_t}{\beta \cdot G \cdot b^3 \cdot h} = \frac{M_t}{G \cdot I_t} \qquad 8.3\text{-}3$$

Valoarea maximă a tensiunii tangențiale, poate fi calculată şi cu relația aproximativă:

$$\tau_{max} \cong \left(3 + 1{,}8 \cdot \frac{b}{h}\right) \cdot \frac{M_t}{b^2 \cdot h} \qquad 8.3\text{-}4$$

În relația de calcul a tensiunii şi a răsucirii specifice, mărimea *b* este totdeauna latura cea mai mică a dreptunghiului, iar coeficienții α, β, γ, *k* depind de raportul h/b. Valori ale acestor coeficienți se prezintă în Tabelul 8.3-1.

Dacă raportul laturilor h/b este foarte mare, atunci se poate considera:

$$\alpha = \beta = 1 / 3 \qquad 8.3\text{-}5$$

iar:

$$\tau_{max} = 3 \cdot \frac{M_t}{b^2 \cdot h}$$
$$\theta = 3 \cdot \frac{M_t}{G \cdot b^3 \cdot h} \qquad 8.3\text{-}6$$

Tabelul 8.3-1

h/b	α	β	k
1	0,208	0,141	1
1,2	0,219	0,166	0,93
1,5	0,231	0,196	0,86
1,75	0,239	0,214	0,82
2	0,246	0,229	0,79
2,5	0,258	0,249	0,77
3	0,263	0,263	0,75
4	0,281	0,281	0,74

Momentul de torsiune pentru tensiunea admisibilă, respectiv răsucirea specifică se poate determina cu relațiile:

$$M_t = \tau_a \cdot \frac{b^2 \cdot h}{3} \quad ; \quad M_t = \theta_a \cdot G \cdot \frac{b^3 \cdot h}{3} \qquad 8.3\text{-}7$$

Relația 8.3-7 poate fi extinsă pentru profilele deschise formate din suprafețe dreptunghiulare de grosime mică (Fig.8.3-3):

$$M_t = \theta \cdot G \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i^3 \cdot h_i}{3} \qquad 8.3\text{-}8$$

de unde rezultă răsucirea specifică:

$$\theta = \frac{3 \cdot M_t}{G \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i^3 \cdot h_i}{3}} \qquad 8.3\text{-}9$$

Tensiunea tangențială maximă la aceste profile se produce la mijlocul laturii mari a dreptunghiului de lățime maximă:

$$\tau_{max} = \theta \cdot G \cdot b_{max} = \frac{3 \cdot M_t}{\sum_{i=1}^{n} b_i^3 \cdot h_i} \cdot b_{max}$$

8.3-10

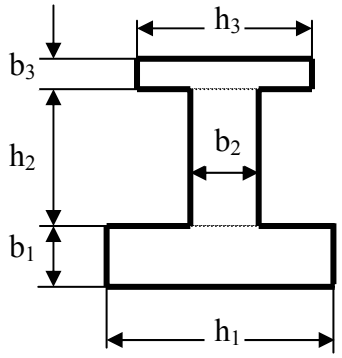


Fig.8.3-3

Pentru profilele deschise a căror secțiune transversală este alcătuită din suprafețe dreptunghiulare cu grosime mică (Fig.8.3-3), tensiunea tangențială maximă poate fi calculată şi cu relația:

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{I_t} \cdot b_{max} \qquad 8.3\text{-}11$$

unde

$$I_t = \frac{1}{3} \cdot \sum_{i=1}^{n} h_i \cdot b_i^3 \qquad 8.3\text{-}12$$

şi reprezintă *momentul de inerție la torsiune* al secțiunii barei.

Pentru profilele standardizate, I_t se corectează cu un coeficient η (coeficient de profil) datorită racordărilor profilului:

$$I_t = \left(\frac{1}{3} \cdot \sum_{i=1}^{n} h_i \cdot b_i^3 \right) \cdot \eta \qquad 8.3\text{-}13$$

Pentru: profilul **I**, $\eta = 1{,}31$
profilul **U**, $\eta = 1{,}12$
profilul **L**, $\eta = 1$.

profilul **T**, $\eta = 1{,}2$

8.4 TORSIUNEA BARELOR TUBULARE CU PEREȚI SUBȚIRI

Se consideră un tub de secțiune transversală oarecare, având perete cu grosime mică. Secțiunea transversală a tubului are formă oarecare însă ea este constantă în lungul tubului. Sub acțiunea momentului de torsiune, în secțiunea transversală a tubului apar tensiuni tangențiale paralele cu linia medie a profilului. Datorită grosimii mici a peretelui, tensiunile tangențiale care sunt tangente la contur, pot fi considerate constante pe grosimea peretelui τ_1 =const., τ_2 = const. În diferite puncte ale conturului, ele au valori diferite $\tau_1 \neq \tau_2$ (Fig.8.4-1).

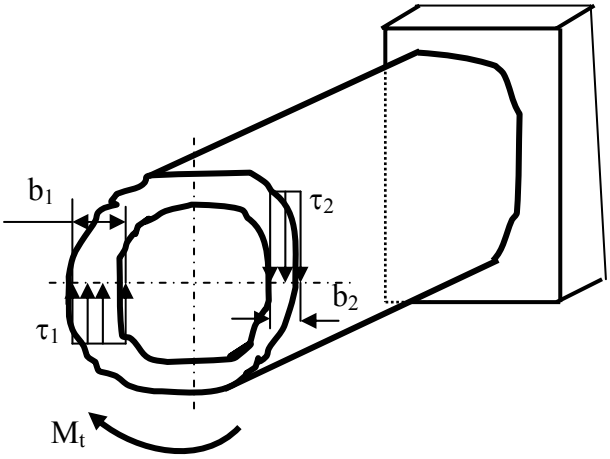


Fig.8.4-1

Din tub se izolează un element de lungime dx (Fig.8.4-2a).

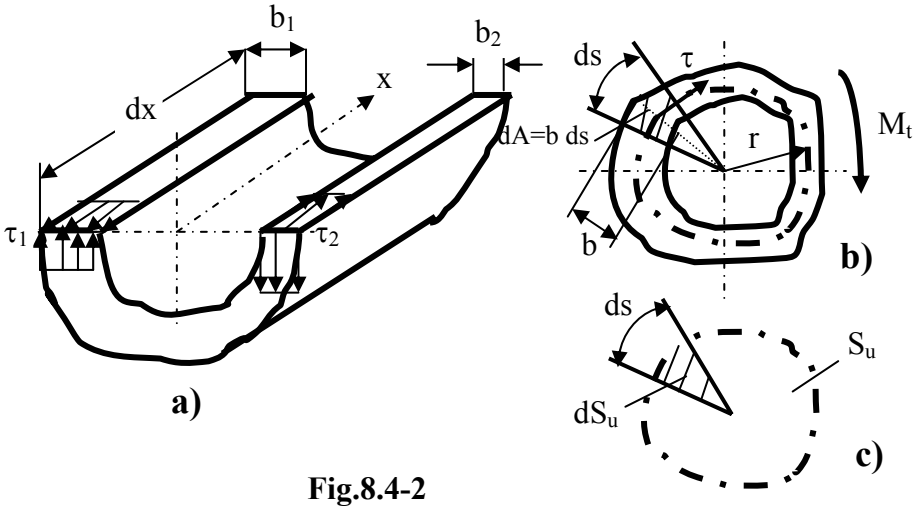


Fig.8.4-2

Se pune condiția de echilibru pentru acest element, ca o sumă de forțe pe direcția axei longitudinale a tubului:

$$\left(\sum F\right)_x = 0 \;\Rightarrow\; \tau_1 \cdot (b_1 \cdot dx) - \tau_2 \cdot (b_2 \cdot dx) = 0 \qquad 8.4\text{-}1$$

de unde se obține

$$\tau_1 \cdot b_1 = \tau_2 \cdot b_2 = \tau \cdot b = \text{const.} \qquad 8.4\text{-}2$$

Produsul dintre tensiunea tangențială şi grosimea peretelui, se numeşte *fluxul tensiunii tangențiale.* Se poate constata că acolo unde grosimea peretelui este mare, tensiunea tangențială este mică şi invers, dar fluxul tensiunii tangențiale are o valoare constantă.

Relația de echivalență dintre momentul de torsiune şi tensiunea tangențială, pentru acest caz, se poate scrie sub forma:

$$M_t = \int_A r \cdot \tau \cdot dA = \int_A r \cdot \tau \cdot b \cdot ds \qquad 8.4\text{-}3$$

Se poate observa că

$$dS_u = \frac{1}{2} \cdot r \cdot ds \qquad 8.4\text{-}4$$

şi formează aria elementară corespunzătoare lungimii de arc *ds* din suprafața delimitată de linia mijlocie a profilului (Fig.8.4-2b,c).

Ținând seama de relațiile 8.4-2 şi 8.4-4, relația 8.4-3 se poate scrie sub forma:

$$M_t = \tau \cdot b \cdot \int_A r \cdot ds = 2 \cdot \tau \cdot b \cdot S_u \qquad 8.4\text{-}5$$

unde S_u reprezintă aria suprafeței închise de conturul mediu al suprafeței secțiunii transversale (Fig.8.4-2c). Din relația 8.4-5, rezultă expresia tensiunii tangențiale:

$$\tau = \frac{M_t}{2 \cdot b \cdot S_u} \qquad 8.4\text{-}6$$

Pe baza relației 8.4-6, rezultă expresia tensiunii tangențiale maxime:

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{2 \cdot b_{min} \cdot S_u} \qquad 8.4\text{-}7$$

şi se atinge acolo unde peretele prezintă cea mai mică grosime.

Unghiul de răsucire se determină pe baza teoremei lui Clapeyron, a egalității dintre lucrul mecanic al forțelor exterioare şi energia de deformație înmagazinată în tub:

$$\frac{1}{2} \cdot M_t \cdot d\varphi = \frac{1}{2 \cdot G} \cdot \int_V \tau^2 \cdot dV \qquad 8.4\text{-}8$$

unde volumul elementar dV este:

$$dV = b \cdot ds \cdot dx \qquad 8.4\text{-}9$$

Ținând seama de relațiile 8.4-6 şi 8.4-9, relația 8.4-8 capătă forma:

$$M_t \cdot d\varphi = \frac{1}{G} \cdot \int_l dx \cdot \oint \frac{M_t^2}{4 \cdot b^2 \cdot S_u^2} \cdot b \cdot ds = \frac{M_t^2 \cdot l}{4 \cdot G \cdot S_u^2} \oint \frac{ds}{b} \qquad 8.4\text{-}10$$

de unde se obține expresia unghiului de răsucire:

$$d\varphi = \frac{M_t \cdot l}{4 \cdot G \cdot S_u^2} \cdot \oint \frac{ds}{b} \qquad 8.4\text{-}11$$

Unghiul de răsucire specific se determină pe baza relației 8.4-11:

$$\theta = \frac{d\varphi}{l} = \frac{M_t}{4 \cdot G \cdot S_u^2} \cdot \oint \frac{ds}{b} \quad \text{sau} \quad \theta = \frac{1}{2 \cdot G \cdot S_u} \cdot \oint \tau \cdot ds \qquad 8.4\text{-}12$$

Integrala de suprafață din relațiile prezentate, se efectuează pe toată lungimea *s* a liniei medii a grosimii suprafeței secțiunii transversale.

Relațiile 8.4-6, 8.4-7, 8.4-11 şi 8.4-12 sunt cunoscute sub numele de *relațiile lui R. Bredt.*

Dacă în lungul liniei medii grosimea peretelui este constantă, unghiul de răsucire specific are expresia:

$$\theta = \frac{M_t \cdot s}{4 \cdot G \cdot b \cdot S_u^2} \qquad 8.4\text{-}13$$

Cele prezentate în acest paragraf, pot fi extinse şi la secțiuni complexe, care prezintă mai multe contururi închise, secțiuni întâlnite la batiurile de maşini, aripi de avion, etc.

Se consideră secțiunea complexă din Fig.8.4-3, secțiune formată din două contururi ce închid ariile S_1 şi S_2, având grosimile de pereți constante b_1, b_2 şi b_3 pe lungimile de contur s_1, s_2 şi s_3.

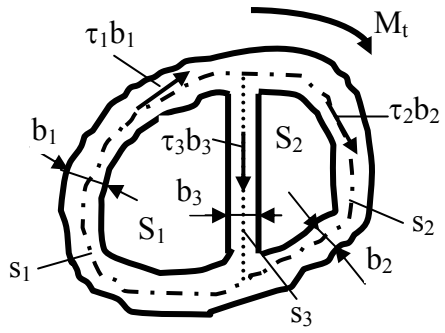


Fig.8.4-3

Fluxul tensiunilor tangențiale este constant pe fiecare porțiune de contur. Relația 8.4-12 se poate scrie şi sub forma:

$$2 \cdot G \cdot \theta \cdot S_u = \oint \tau \cdot ds \qquad 8.4\text{-}14$$

iar pentru cele două contururi:

$$2 \cdot G \cdot \theta \cdot S_1 = \tau_1 \cdot s_1 + \tau_3 \cdot s_3 \qquad 8.4\text{-}15a$$

$$2 \cdot G \cdot \theta \cdot S_2 = \tau_2 \cdot s_2 - \tau_3 \cdot s_3 \qquad 8.4\text{-}15b$$

Scriind relația de echivalență în raport cu un punct situat pe peretele intermediar, rezultă:

$$M_t = 2 \cdot \tau_1 \cdot b_1 \cdot S_1 + 2 \cdot \tau_2 \cdot b_2 \cdot S_2 \qquad 8.4\text{-}16$$

Condiția de echilibru a tensiunilor tangențiale în nodul de întâlnire a celor trei pereți, conduce la relația:

$$\tau_1 \cdot b_1 = \tau_2 \cdot b_2 + \tau_3 \cdot b_3 \qquad 8.4\text{-}17$$

de unde se obține:

$$\tau_3 = \frac{1}{b_3} \cdot \left(\tau_1 \cdot b_1 - \tau_2 \cdot b_2\right) \qquad 8.4\text{-}18$$

Rezolvând sistemul format de ecuațiile 8.4-15a,b, 8.4-16 şi 8.4-18 având ca şi necunoscute tensiunile tangențiale τ_1, τ_2, τ_3 şi unghiul de răsucire specific θ, rezultă:

$$\tau_1 = \frac{M_t}{2 \cdot f(S)} \cdot \left[S_1 \cdot \left(b_2 \cdot s_3 + b_3 \cdot s_2\right) + S_2 \cdot b_2 \cdot s_3\right] \qquad 8.4\text{-}19a$$

$$\tau_2 = \frac{M_t}{2 \cdot f(S)} \cdot \left[S_1 \cdot b_1 \cdot s_3 + S_2 \cdot \left(b_1 \cdot s_3 + b_3 \cdot s_1\right)\right] \qquad 8.4\text{-}19b$$

$$\tau_3 = \frac{M_t}{2 \cdot f(S)} \cdot \left[S_1 \cdot b_1 \cdot s_2 - S_2 \cdot b_2 \cdot s_1\right] \qquad 8.4\text{-}19c$$

$$\theta = \frac{M_t}{4 \cdot G \cdot f(S)} \cdot \left[b_1 \cdot s_2 \cdot s_3 + b_2 \cdot s_1 \cdot s_3 + b_3 \cdot s_1 \cdot s_2\right] \qquad 8.4\text{-}19d$$

unde:

$$f(S) = S_1^2 \cdot b_1 \cdot b_3 \cdot s_2 + S_2^2 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdot s_1 + \left(S_1 + S_2\right)^2 \cdot b_1 \cdot b_2 \cdot s_3 \qquad 8.4\text{-}19e$$

8.5 ENERGIA DE DEFORMAȚIE LA TORSIUNE

Pentru stabilirea relației energiei de deformație la torsiune, se porneşte de la relația energiei de deformație stabilită la solicitarea axială, însă particularizată pentru torsiune:

$$U = \int_V \frac{\tau^2}{2 \cdot G} \cdot dV = \frac{1}{2 \cdot G} \cdot \int_V \frac{M_t^2}{I_p^2} \cdot r^2 \cdot dA \cdot dx = \frac{1}{2 \cdot G \cdot I_p^2} \cdot \int_A r^2 \cdot dA \cdot \int_l M_t^2 \cdot dx$$

Dar,

$$\int_A r^2 \cdot dA = I_p$$

şi expresia energiei de deformație, devine:

$$U = \int_l \frac{M_t^2}{2 \cdot G \cdot I_p} \cdot dx \qquad 8.5\text{-}1$$

Pentru o bară de secțiune circulară constantă şi lungime *l*, solicitată la torsiune, energia de deformație are expresia:

$$U = \frac{M_t^2 \cdot l}{2 \cdot G \cdot I_p} \qquad 8.5\text{-}2$$

8.6 DUALITATEA TENSIUNILOR TANGENȚIALE. STAREA DE FORFECARE PURĂ

Fie un element de volum de laturi dx, dy şi grosime unitară, pe fețele căruia acționează tensiunile normale σ_x, σ_y precum şi tensiunile tangențiale paralele cu axele x, respectiv y: τ_{yx} şi τ_{xy} (Fig.8.6-1a).

Starea de tensiune la care tensorul tensiune are numai componente paralele cu două din axe (sunt într-un plan), constituie o *stare plană de tensiune.* O stare plană de tensiune se poate reprezenta ca în Fig.8.6-1b.

Punând condiția de echilibru, ca o sumă de momente față de punctul O_1, se obține ecuația:

$$2 \cdot \tau_{xy} \cdot dy \cdot 1 \cdot \frac{dx}{2} - 2 \cdot \tau_{yx} \cdot dx \cdot 1 \cdot \frac{dy}{2} = 0 \qquad 8.6\text{-}1$$

de unde rezultă:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \qquad 8.6\text{-}2$$

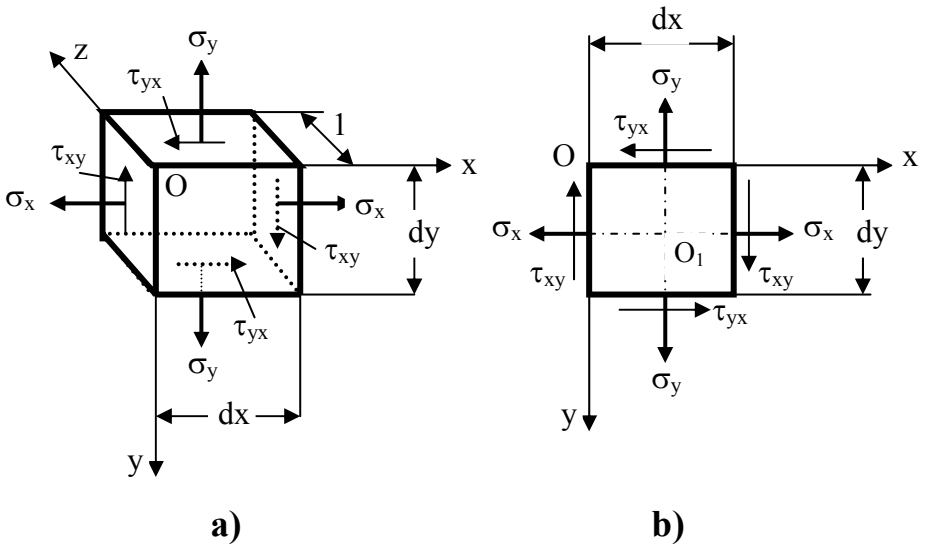
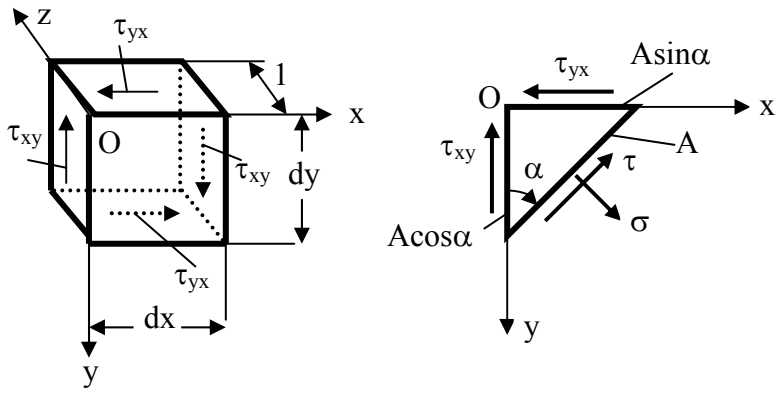


Fig.8.6-1

Relația 8.6-1, exprimă *principiul dualității tensiunilor tangențiale* care se exprimă astfel: *dacă pe un plan din interiorul unui corp există o tensiune tangențială, atunci pe un plan perpendicular pe el, există aceeaşi tensiune tangențială, ambele fiind simetric orientate față de muchia comună a planelor şi perpendiculare pe ea.*

Fie acum un element de volum la care pe fețele sale acționează numai tensiuni tangențiale, toate egale, conform principiului dualității tensiunilor tangențiale (Fig.8.6-2a). Se spune că un astfel de element de volum se află în *stare de forfecare pură.* Acesta îşi modifică unghiurile dar nu şi lungimile laturilor.

În cele ce urmează, se caută relații pentru tensiunile de pe o față înclinată cu unghiul α față de axa Oy. Aceste tensiuni se determină din condiția de echilibru a elementului de volum reprezentat în Fig.8.6-2b.



a) **b)**

Fig.8.6-2

Condițiile de echilibru, se scriu ca sumă de forțe pe direcția tensiunilor σ şi τ care acționează pe fața de arie A:

$$\sigma \cdot A - \tau_{xy} \cdot A\cos\alpha \cdot \sin\alpha - \tau_{yx} \cdot A\sin\alpha \cdot \cos\alpha = 0 \qquad 8.6\text{-}3a$$

$$\tau \cdot A + \tau_{xy} \cdot A\cos\alpha \cdot \cos\alpha - \tau_{yx} \cdot A\sin\alpha \cdot \sin\alpha = 0 \qquad 8.6\text{-}3b$$

Deoarece $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, din relațiile 8.6-3a,b se obține expresia tensiunilor pe fața înclinată în cazul stării plane de forfecare:

$$\sigma = \tau_{xy} \cdot \sin 2\alpha \qquad 8.6\text{-}4a$$

$$\tau = -\tau_{xy} \cdot \cos 2\alpha \qquad 8.6\text{-}4b$$

Se poate observa că pentru $\alpha = 45^0$, din relațiile 8.6-4a,b, se obține:

$$\sigma_{\alpha=45^0} = \tau_{xy} \quad \text{şi} \quad \tau_{\alpha=45^0} = 0 \qquad 8.6\text{-}5$$

De asemenea, pe o secțiune perpendiculară pe aceasta când $\alpha = 135^0$, se obține:

$$\sigma_{\alpha=135^0} = -\tau_{xy} \quad \text{şi} \quad \tau_{\alpha=135^0} = 0 \qquad 8.6\text{-}6$$

Starea de forfecare pură se întâlneşte la un tub subțire (grosimea peretelui δ şi raza medie R) solicitat la torsiune.

În acest caz, tensiunea poate fi considerată uniform distribuită, ceea ce conduce la următoarea relație:

$$M_t = \tau \cdot \delta \cdot 2\pi R \cdot R \qquad 8.6\text{-}7$$

de unde se obține tensiunea tangențială din peretele tubului subțire:

$$\tau = \frac{M_t}{2 \cdot \pi \cdot R^2 \cdot \delta} \qquad 8.6\text{-}8$$

8.7 CALCULUL ARCURILOR ELICOIDALE CU PAS MIC

Arcurile elicoidale cu pas mic sunt elemente des întâlnite în practică: la vagoanele de cale ferată, la supape, la unele mecanisme etc. Ele sunt supuse acțiunii unor forțe exterioare care întind sau comprimă arcul.

Fie arcul elicoidal cu pas mic din Fig.8.7-1a, la care: F – sarcina aplicată arcului; R – raza de înfăşurare; d – diametrul sârmei arcului; n – numărul de spire.

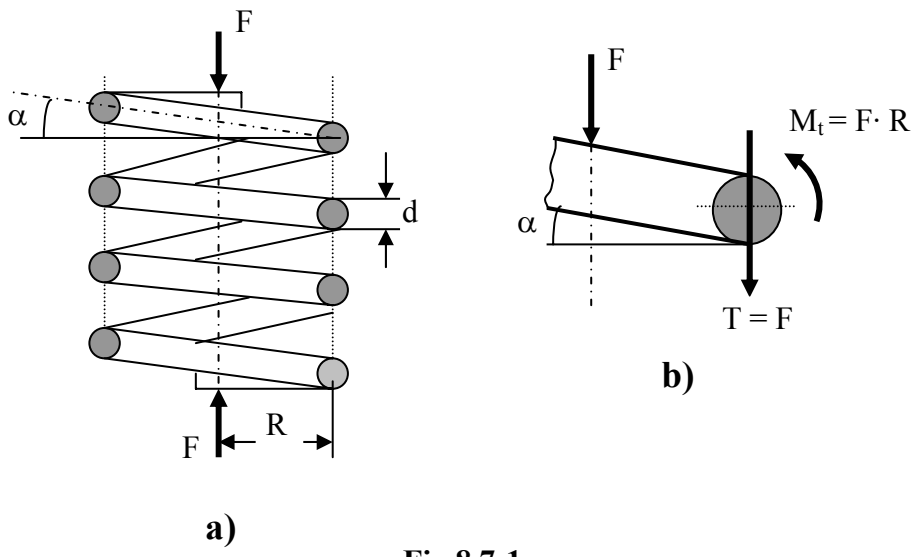


Fig.8.7-1

Dacă unghiul de înclinare al spirei α este mare, în secțiunea transversală a spirei iau naştere eforturile: axial, tăietor, moment încovoietor şi moment de torsiune. La arcul cu unghiul α mic, efortul axial şi momentul încovoietor sunt foarte mici şi se pot neglija. Deci, la arcurile elicoidale cu pas mic, singurele eforturi care apar în secțiunea spirei arcului, sunt Fig.8.7-1b):

- efortul tăietor T = F
- momentul de torsiune $M_t = F\ R$.

Distribuția tensiunilor tangențiale în punctele reprezentative ale secțiunii, produse de cele două eforturi sunt prezentate în Fig.8.7-2.

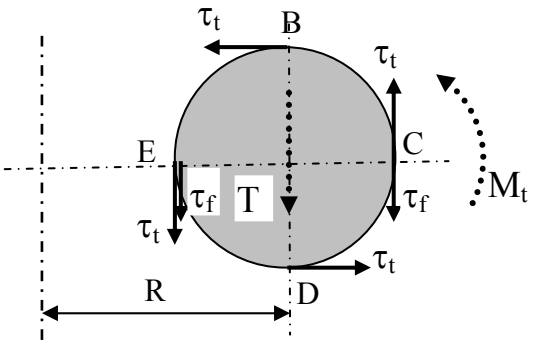


Fig.8.7-2

Tensiunea maximă se produce în puntul E situat la interiorul spirei, acolo unde tensiunile produse de cele două eforturi sunt maxime şi de acelaşi sens.

Tensiunea tangențială maximă produsă de efortul tăietor este cea din punctele C şi E (în punctele B şi D, tensiunea tangențială produsă de efortul tăietor este nulă) şi are valoarea:

$$\tau_{f,max} = \tau_f = \frac{T}{A} = \frac{F}{\frac{\pi \cdot d^2}{4}} = \frac{4 \cdot F}{\pi \cdot d^2} \qquad 8.7\text{-}1$$

Tensiunea tangențială maximă produsă de momentul de torsiune se produce în toate punctele situate pe conturul secțiunii şi are valoarea:

$$\tau_{t,max} = \tau_t = \frac{M_t}{W_p} = \frac{F \cdot R}{\frac{\pi \cdot d^3}{16}} = \frac{16 \cdot F \cdot R}{\pi \cdot d^3} \qquad 8.7\text{-}2$$

În punctul cel mai solicitat (punctul E din Fig.8.7-2), tensiunea tangențială maximă este:

$$\tau_{max} = \tau_f + \tau_t = \frac{4 \cdot F}{\pi \cdot d^2} + \frac{16 \cdot F \cdot R}{\pi \cdot d^3} = \frac{4 \cdot F}{\pi \cdot d^2} \cdot \left(1 + \frac{4 \cdot R}{d}\right) \qquad 8.7\text{-}3$$

De cele mai multe ori, la astfel de elemente, se neglijează tensiunea tangențială produsă de efortul tăietor, calculul făcându-se numai din condiția de rezistență la torsiune:

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{W_p} = \frac{16 \cdot F \cdot R}{\pi \cdot d^3} = \tau_a \qquad 8.7\text{-}4$$

de unde rezultă diametru sârmei pentru realizarea arcului:

$$d = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot F \cdot R}{\pi \cdot \tau_a}} \qquad 8.7\text{-}5$$

În practică, la calculul arcurilor, în relația 8.7-4 se introduce un coeficient de corecție k, prin care se ține seama atât de influența forfecării cât şi de o serie de alți factori neluați în considerare (încovoierea, deformațiile longitudinale etc.). Valoarea coeficientului k este cu atât mai mare cu cât raportul R/r (r – raza sârmei, r = d/2) este mai mic, adică cu cât arcul este mai rigid din punct de vedere geometric.

Relația 8.7-4 corectată are forma:

$$\tau_{max} = k \cdot \frac{M_t}{W_p} = k \cdot \frac{16 \cdot F \cdot R}{\pi \cdot d^3} \qquad 8.7\text{-}6$$

Valorile coeficientului k sunt prezentate în Tabelul 8.7-1.

Tabelul 8.7-1

R/r	3	4	5	6	7	8	9	10
k	1,58	1,40	1,31	1,25	1,21	1,18	1,16	1,14

Săgeata arcului f, adică lungirea sau scurtarea lui pe direcția forței de solicitare, se determină din egalitatea lucrului mecanic al forței F cu energia de deformație a arcului.

Lucrul mecanic al forței F de solicitare, este:

$$L = \frac{1}{2} \cdot F \cdot f \qquad 8.7\text{-}7$$

iar energia de deformație a arcului, este:

$$U = \frac{M_t^2 \cdot l}{2GI_p} = \frac{F^2R^2 \cdot 2\pi Rn}{2G\frac{\pi d^4}{32}} = \frac{32 \cdot F^2R^3 \cdot n}{G \cdot d^4} \qquad 8.7\text{-}8$$

Egalând relațiile 8.7-7 şi 8.7-8, se obține:

$$\frac{1}{2} \cdot F \cdot f = \frac{32 \cdot F^2 \cdot R^3 \cdot n}{g \cdot d^4} \qquad 8.7\text{-}9$$

de unde rezultă relația pentru săgeata arcului:

$$f = \frac{64 \cdot F \cdot R^3 \cdot n}{G \cdot d^4} \qquad 8.7\text{-}10$$

În practică, uneori se calculează variația săgeții Δf datorată unei variații a forței ΔF:

$$\Delta f = \frac{64 \cdot \Delta F \cdot R^3 \cdot n}{G \cdot d^4} \qquad 8.7\text{-}11$$

Se poate constata din relația 8.7-10, că între săgeată şi forța care solicită arcul, există o relație liniară.

8.8 APLICAȚII LA SOLICITAREA DE TORSIUNE

Aplicația nr.1. *Să se verifice arborele din Fig.8.8.1-1a, ştiind că transmite prin roata 1 o putere P = 180 KW sub o turație n = 500 rot/min, la două maşini consumatoare de puteri:* P_1 *= 80 KW,* P_2 *= 100 KW. Se cunosc: diametrul arborelui d = 100 mm,* τ_a *= 80 MPa, G =* $8{,}5\cdot 10^4$ *MPa,* θ_a *= 0,3* ^{0}*/m.*

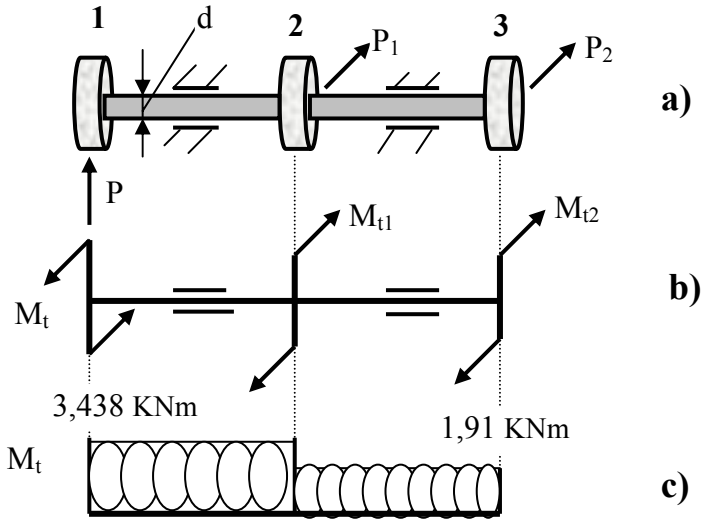


Fig.8.8.1-1

Problema poate fi rezolvată în două variante.

Varianta I: Se calculează momentele de torsiune în funcție de puterea transmisă:

$$M_t = 9{,}55\cdot\frac{P}{n} = 9{,}55\cdot\frac{180}{500} = 3{,}438 \text{ KNm}$$

$$M_{t1} = 9{,}55\cdot\frac{P_1}{n} = 9{,}55\cdot\frac{80}{500} = 1{,}528 \text{ KNm}$$

$$M_{t2} = 9{,}55\cdot\frac{P_2}{n} = 9{,}55\cdot\frac{100}{500} = 1{,}91 \text{ KNm}$$

Cele trei momente de torsiune sunt reprezentate în Fig.8.8.1-1b, iar diagramele lor în Fig.8.8.1-1c. Din diagramele de eforturi, rezultă că secțiunea

periculoasă se află între roate 1 şi roata 2, unde momentul de torsiune are valoare maximă.

Verificarea condiției de rezistență se face cu relația:

$$\tau_{max} = \frac{M_{t,max}}{W_p} = \frac{M_t}{\frac{\pi \cdot d^3}{16}} = \frac{16 \cdot 3{,}438 \cdot 10^6}{\pi \cdot 100^3} = 17{,}51 \text{ MPa} < \tau_a$$

Verificarea condiției de rigiditate se face cu relația:

$$\theta_{max} = \frac{M_{t,max}}{G \cdot I_p} = \frac{M_t}{G \cdot \frac{\pi \cdot d^4}{32}} = \frac{32 \cdot M_t}{G \cdot \pi \cdot d^4} = \frac{32 \cdot 3{,}438 \cdot 10^6}{8{,}5 \cdot 10^4 \cdot \pi \cdot 100^4} = 4{,}12 \cdot 10^{-6} \text{rad/mm}$$

$$\theta_{max} = 4{,}12 \cdot 10^{-6} \text{ rad/mm} = 4{,}12 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{180}{\pi} \cdot 10^3 \ {}^0/\text{m} = 0{,}236 \ {}^0/\text{m} < \theta_a$$

Ambele condiții sunt verificate pentru acest arbore.

Varianta a II-a: În această variantă nu este nevoie de trasarea diagramelor de momente, dacă se observă că prin porțiunea dintre roata 1 şi 2 se transmite cea mai mare putere (puterea P = 180 KW) şi ca urmare aici şi momentul de torsiune este cel mai mare, cel corespunzător puterii P.

Mai departe calculul este cel prezentat la *Varianta I.*

Observație: La acest arbore roțile prin care se primeşte şi se transmit mai departe puterile, nu sunt aşezate economic, deoarece la această aşezare porțiunea dintre roata 1 şi 2 este foarte solicitată. O descărcare a arborelui are loc dacă roata 1 de acționare este aşezată între cele două roți cu puteri consumatoare. În acest caz, într-o porțiune dintre două roți, s-ar transmite cel mult puterea P_3 = 100 KW, semnificativ mai puțin decât în varianta prezentată. La astfel de transmisii, este foarte importantă aşezarea roții motoare.

Aplicația nr.2. *Un arbore de transmisie din oțel, primeşte prin roate 3 o putere P_3 = 750 CP şi acționează sub o turație n = 400 rot/min prin roțile 1, 2 şi 4, trei maşini care consumă puterile P_1 = 200 CP, P_2 = 300 CP, P_4 = 250 CP (Fig.8.8.2-1a). Distanța dintre roți este aceeaşi, l = 1 m.*

Cunoscând τ_a = 38 MPa, θ_a = 0,25 ^{0}/m, G = 8,1·10^4 MPa, se cere diametrul arborelui şi răsucirea relativă între roțile 3 şi 4.

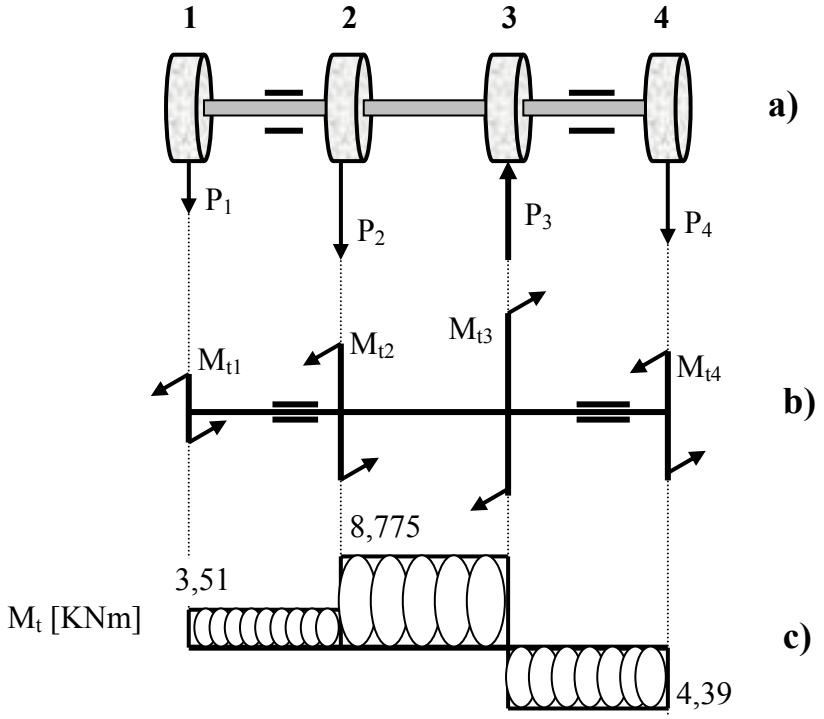


Fig.8.8.2-1

Momentele de torsiune care se produc pe cele 4 roți, sunt prezentate în Fig.8.8.2-1b, iar diagramele pe fiecare porțiune a arborelui în Fig.8.8.2-1c, rezultate din următoarele calcule:

$$M_{t,1-2} = 7{,}02 \cdot \frac{P_1}{n} = 7{,}02 \cdot \frac{200}{400} = 3{,}51 \text{ KNm}$$

$$M_{t,2-3} = 7{,}02 \cdot \frac{P_1 + P_2}{n} = 7{,}02 \cdot \frac{500}{400} = 8{,}775 \text{ KNm}$$

$$M_{t,4-3} = 7{,}02 \cdot \frac{P_4}{n} = 7{,}02 \cdot \frac{250}{400} = 4{,}39 \text{ KNm}$$

Secțiunea periculoasă este situată între roata 2 şi 3. Acest lucru se putea observa de la început, deoarece pe aici se transmite cea mai mare putere.

Dimensionarea din condiția de rezistență, se face cu relația:

$$W_{p,nec} = \frac{M_{t,max}}{\tau_a} = \frac{M_{t,2-3}}{\tau_a} = \frac{\pi \cdot d_1^3}{16}$$

$$\Rightarrow \quad d_1 = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_{t,2-3}}{\pi \cdot \tau_a}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 8{,}775 \cdot 10^6}{\pi \cdot 38}} \cong 110 \text{ mm}$$

Din condiția de rigiditate, se obține:

$$I_{p,nec} = \frac{M_{t,max}}{G \cdot \theta_a} = \frac{M_{t,2-3}}{G \cdot \theta_a} = \frac{\pi \cdot d_2^4}{32}$$

$$\Rightarrow \quad d_2 = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot M_{t,2-3}}{\pi \cdot G \cdot \theta_a}} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 8{,}775 \cdot 10^6}{\pi \cdot 8{,}1 \cdot 10^4 \cdot 0{,}25 \cdot \frac{\pi}{180} \cdot 10^{-3}}} \cong 125 \ mm$$

Dimensiunea finală pentru diametrul arborelui se ia aceea care să satisfacă ambele condiții:

$$d = \max(d_1 ; d_2) = d_2 = 125 \text{ mm}.$$

Răsucirea relativă între roțile 3 şi 4, se calculează cu relația:

$$\Delta\varphi_{3-4} = \frac{M_{t,3-4} \cdot l_{3-4}}{G \cdot I_p} = \frac{4{,}39 \cdot 10^6 \cdot 10^3}{8{,}1 \cdot 10^4 \cdot \frac{\pi \cdot 125^4}{32}} = 2{,}26 \cdot 10^{-3} \text{ rad} = 0{,}129^0$$

Aplicația nr.3. *O bară cu secțiune variabilă, cu forma şi dimensiunile din Fig.8.8.3-1, este solicitat de cuplurile M_0. Se cere să se determine valoarea capabilă a cuplului M_0 dacă τ_a = 50 MPa şi apoi deformația totală a secțiunii 2. Se cunosc: d = 50 mm, G = 8,5·10^4 MPa.*

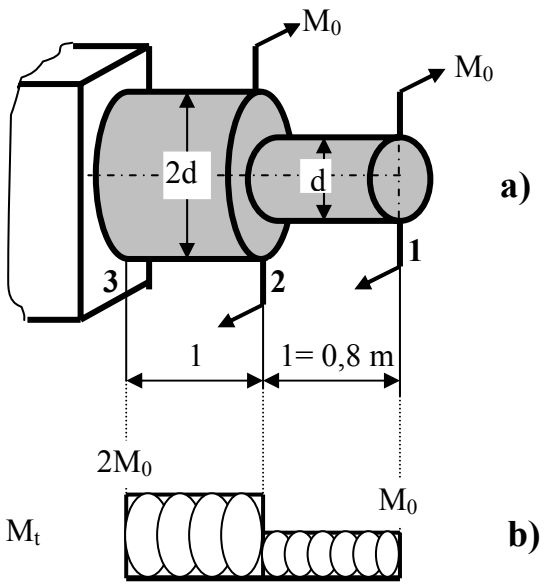


Fig.8.8.3-1

Diagrama momentului de torsiune este prezentată în Fig.8.8.3-1b. Secțiunea periculoasă este pe intervalul 1-2, unde cu toate că momentul de torsiune este jumătate din cel de pe intervalul 2-3, modulul de rezistență polar este de 8 ori mai mic.

Efortul capabil se determină cu relația:

$$M_{t,cap} = \tau_a \cdot W_{p,min} = M_0$$

$$\Rightarrow \quad M_0 = \tau_a \cdot W_{p,1-2} = 50 \cdot \frac{\pi \cdot 50^3}{16} = 124339{,}8 \text{ Nmm} \cong 0{,}124 \text{ KNm}$$

Unghiul de răsucire al secțiunii 2, este:

$$\varphi_2 = \Delta\varphi_{2-3} = \frac{M_{2-3} \cdot l}{G \cdot I_{p,2-3}} = \frac{2 \cdot 0{,}124 \cdot 10^6 \cdot 800}{8{,}5 \cdot 10^4 \cdot \frac{\pi \cdot 100^4}{32}} = 2{,}38 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$$

Aplicația nr.4. *Pentru bara de secțiune circulară din Fig.8.8.4-1a, cu diametrul d = 80 mm, se cere:*
a) tensiunea maximă
b) răsucirea relativă între secțiunile 1 şi 2.
Se cunosc: $M_0 = 4$ *KNm,* $G = 8 \cdot 10^4$ *MPa,* $l = 0{,}5$ *m.*

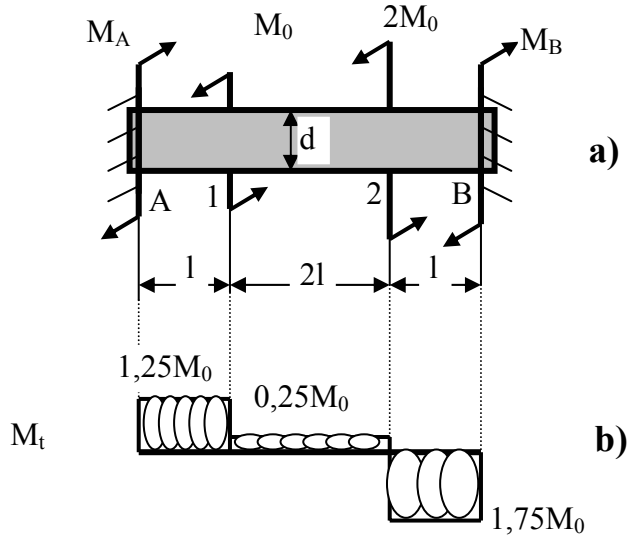


Fig.8.8.4-1

Pentru obținerea diagramei momentului de torsiune, trebuie determinate mai întâi reacțiunile (sau măcar una dintre ele). În acest scop, pentru sistemul din Fig.8.8.4-1a se pune condiția de echilibru (singura care se poate pune):

$$\sum M = 0 \quad \Rightarrow \quad M_A - M_0 - 2M_0 + M_B = 0$$
$$\Rightarrow \quad M_A + M_B = 3M_0 \qquad 8.8.4\text{-}1$$

Există două necunoscute şi s-a putut scrie o singură relație. Rezultă că acest sistem, este un sistem static nedeterminat la torsiune. Ca şi pentru celelalte solicitări şi aici se caută o relație de deformație, care apoi se explicitează şi se atașează ecuației de echilibru deja scrise.

Relația suplimentară care se poate scrie este (de fapt sunt două astfel de relații):

$$\varphi_A = 0 \quad \text{sau} \quad \varphi_B = 0$$

Se va explicita numai prima condiție:

$$\varphi_A = \Delta\varphi_{A-B} = \frac{M_A \cdot l}{GI_p} + \frac{(M_A - M_0)\cdot 2l}{GI_p} + \frac{(M_A - M_0 - 2M_0)\cdot l}{GI_p} = 0$$

sau

$$M_A + 2M_A - 2M_0 + M_A - 3M_0 = 0$$

iar după reducerile necesare, se obține:

$$4M_A = 5M_0 \quad \Rightarrow \quad M_A = \frac{5}{4}M_0 = 1{,}25\,M_0 \qquad 8.8.4\text{-}2$$

Având determinată reacțiunea din reazemul A, din relația 8.8.4-1 se obține reacțiunea din reazemul B:

$$M_B = 3M_0 - M_A = 3M_0 - 1{,}25 \cdot M_0 = 1{,}75 \cdot M_0$$

Diagrama momentului de torsiune pentru această bară, este prezentată în Fig.8.8.4-1b.

Din analiza diagramei momentului de torsiune şi a variației secțiunii transversale în lungul barei, rezultă că secțiunea periculoasă a barei este pe interval 2-B, interval pe care momentul de torsiune are valoare maximă, bara fiind cu secțiune constantă.

a) Tensiunea tangențială maximă se calculează cu relația:

$$\tau_{max} = \frac{M_{t,max}}{W_p} = \frac{1{,}75\,M_0}{\frac{\pi \cdot d^3}{16}} = \frac{16 \cdot 1{,}75 \cdot 4 \cdot 10^6}{\pi \cdot 80^3} = 69{,}63 \quad \text{MPa}$$

b) Răsucirea relativă între secțiunile 1şi 2, este:

$$\Delta\varphi_{1-2} = \frac{M_{t,1-2} \cdot 2l}{G \cdot I_p} = \frac{0{,}25M_0 \cdot 2l}{G \cdot \frac{\pi \cdot d^4}{32}} = \frac{32 \cdot 0{,}25 \cdot 4 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 500}{8 \cdot 10^4 \cdot \pi \cdot 80^4} = 2{,}49 \cdot 10^{-2} \quad \text{rad}$$

$$\Delta\varphi_{1-2} = 2{,}49 \cdot 10^{-2} \ \text{rad} = 2{,}49 \cdot 10^{-2} \cdot \frac{180}{\pi} = 1{,}43^0$$

Aplicația nr.5. *Pentru o bară de secțiune constantă tip cheson din Fig.8.8.5-1, să se calculeze momentul de torsiune capabil, dacă* τ_a *= 80 MPa,* θ_a *= 0,25* ^{0}*/m şi G =* $8 \cdot 10^4$ *MPa.*

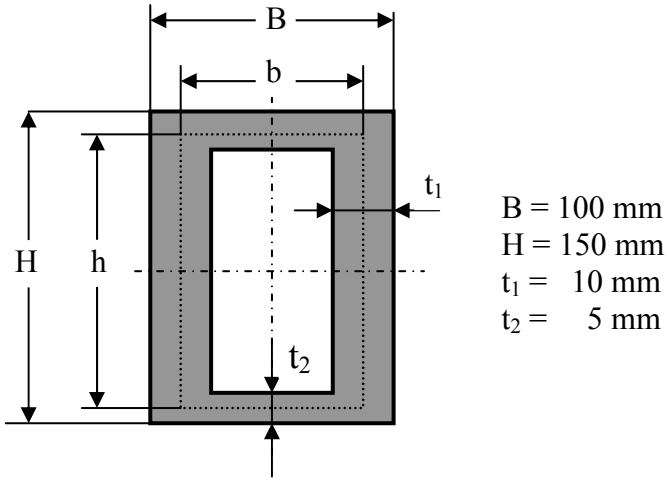


Fig.8.8.5-1

Condiția de rezistență este

$$\tau_{max} = \frac{M_{1t}}{2 \cdot S_u \cdot t_{min}} = \tau_a$$

de unde rezultă:

$$M_{1t,cap} = 2 \cdot S_u \cdot t_{min} \cdot \tau_a = 2 \cdot b \cdot h \cdot t_{min} \cdot \tau_a =$$
$$= 2 \cdot 90 \cdot 145 \cdot 5 \cdot 80 = 10{,}44 \cdot 10^6 \text{ Nmm} = 10{,}44 \text{ KNm}$$

Condiția de rigiditate este

$$M_{2t,cap} = \theta_a \cdot G \cdot I_t$$

unde:

$$I_t = \frac{h^2 b^2 t_1 t_2}{H t_2 + B t_1 - t_1^2 - t_2^2} = \frac{145^2 \cdot 90^2 \cdot 10 \cdot 5}{150 \cdot 5 + 100 \cdot 10 - 10^2 - 5^2} = 5{,}24 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

Cu valoarea obținută pentru momentul de inerție la torsiune, rezultă momentul de torsiune:

$$M_{2t,cap} = 0,25 \cdot \frac{\pi}{180} \cdot 10^{-3} \cdot 8 \cdot 10^{4} \cdot 5,24 \cdot 10^{6} = 1,83 \cdot 10^{6}\ Nmm = 1,83\ kNm$$

Momentul de torsiune capabil pentru bară, este:

$M_{t,cap} = \min (M_{1t,cap}, M_{2t,cap}) = M_{2t,cap} = 1,83$ kNm.

Observație: La colțurile interioare ale secțiunii, se produce o puternică concentrare a tensiunii tangențiale, care poate ajunge la limita de curgere. În cazul unor racordări ale colțurilor interioare cu raza *r*, coeficientul de concentrare al tensiunii tangențiale se poate calcula cu relația:

$$\alpha_{\tau} = 1,74 \cdot \sqrt[3]{\frac{t_{max}}{r}}$$

Aplicația nr.6. *Pentru o bară de secțiune pătrată tip cheson cu dimensiunea a = 4t (Fig.8.8.6-1a), se cere să se studieze cum se modifică rezistența şi rigiditatea barei la torsiune, prin tăierea acesteia ca în Fig.8.8.6-1b.*

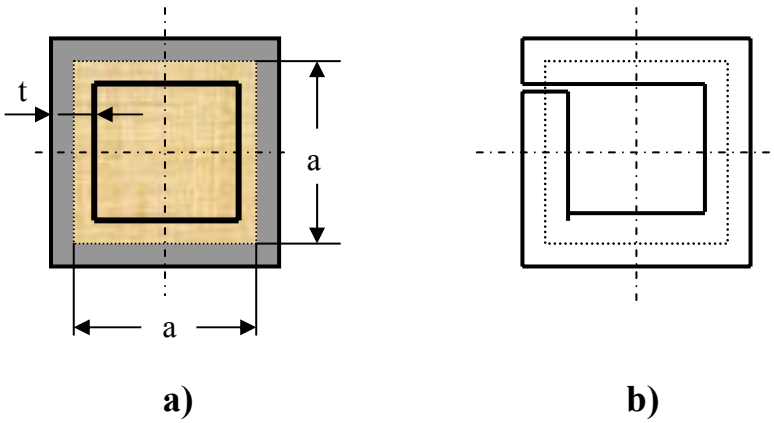


Fig.8.8.6-1

Pentru secțiunea din Fig.8.8.6-1a, modulul de rezistență la torsiune, este:

$$W_{t1} = 2 \cdot t \cdot S_u = 2 \cdot t \cdot (a)^2 = 2t \cdot (4t)^2 = 32\ t^3$$

iar pentru secțiunea din Fig.8.8.6-1b

$$W_{t2} = \frac{I_t}{t_{max}} = \frac{\frac{1}{3}\sum h_i b_i^3}{t_{max}} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \left(a \cdot t^3 + a \cdot t^3 + a \cdot t^3 + a \cdot t^3\right)}{t} = \frac{4}{3} \cdot a \cdot t^2 = \frac{16}{3} \cdot t^3$$

Făcând raportul modulelor de rezistență pentru cele două variante, se obține:

$$\frac{W_{t1}}{W_{t2}} = \frac{32 \cdot t^3}{\frac{16}{3} \cdot t^3} = 6$$

Rezultă că prin tăierea secțiunii barei care devine profil deschis, capacitatea ei de rezistență la torsiune se micşorează de 6 ori.

Rigiditatea la torsiune pentru secțiunea netăiată, este

$$G \cdot I_{t1} = G \cdot \frac{4 \cdot S_u^2}{\oint \frac{ds}{t}} = G \cdot \frac{4 \cdot \left(a^2\right)^2}{\frac{1}{t} \cdot \oint ds} = G \cdot \frac{4 \cdot a^4}{\frac{1}{t} \cdot 4a} = G \cdot a^3 \cdot t$$

iar pentru secțiunea tăiată:

$$G \cdot I_{t2} = G \cdot \frac{1}{3}\sum h_i b_i^3 = G \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(at^3 + at^3 + at^3 + at^3\right) = G \cdot \frac{4}{3} \cdot a \cdot t^3$$

Făcând raportul rigidităților, rezultă:

$$\frac{W_{t1}}{W_t} = \frac{G \cdot a^3 \cdot t}{G \cdot \frac{4}{3} \cdot a \cdot t^3} = \frac{3}{4} \cdot \frac{a^2}{t^2} = \frac{3}{4} \cdot \frac{(4t)^2}{t^2} = 12$$

Pentru secțiunea tăiată, rigiditatea la torsiune s-a micşorat de 12 ori.

Din acest exemplu, reiese că profilele cu contur închis, prezintă o rezistență şi rigiditate la torsiune mult mai mari decât cele cu contur deschis.

Aplicația nr.7. *Să se calculeze tensiunile tangențiale şi răsucirea specifică pentru secțiunea dublu conexă din Fig.7.8.7-1, unde:* $t_1 = t_2 = t_3 = 10$ *mm,* $M_t = 15$ *KNm,* $G = 8 \cdot 10^4$ *MPa.*

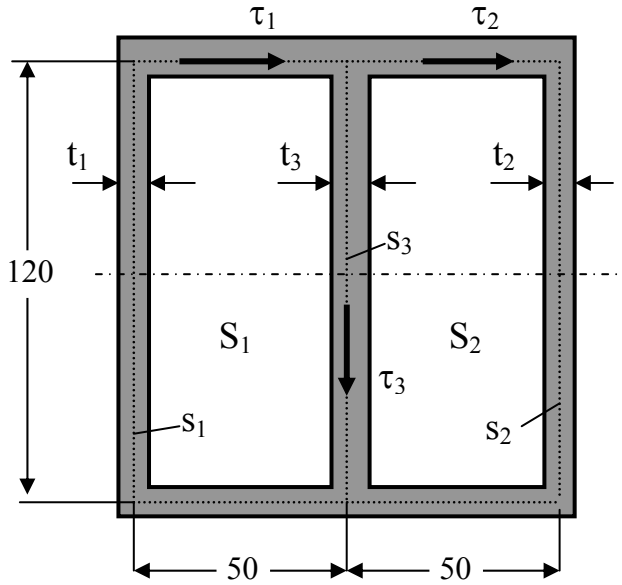


Fig.8.8.7-1

La început se calculează funcția (relația 8.4-19e):

$$f(S) = S_1^2 t_1 t_3 s_2 + S_2^2 t_2 t_3 s_1 + (S_1 + S_2)^2 t_1 t_2 s_3 = 4392 \cdot 10^9 \ \ \text{mm}^7$$

unde:

$S_1 = S_2 = 120 \cdot 50 = 6 \cdot 10^3$ mm^2
$s_1 = s_2 = 50 + 120 + 50 = 220$ mm
$s_3 = 120$ mm

Tensiunile tangențiale din laturile secțiunii se determină cu relațiile 8.4-19a,b,c:

$$\tau_1 = \frac{M_t}{2 \cdot f(S)} = \left[S_1(t_2 s_3 + t_3 s_2) + S_2 t_2 s_3\right] = 3{,}142 \cdot \frac{M_t}{10^6} = 47{,}13 \ \ \text{MPa}$$

$$\tau_2 = \frac{M_t}{2 \cdot f(S)} \cdot \left[S_1 t_1 s_3 + S_2 \cdot (t_1 s_3 + t_3 s_1)\right] = 3{,}142 \cdot \frac{M_t}{10^6} = 47{,}13 \ \ \text{MPa}$$

$$\tau_3 = \frac{M_t}{2 \cdot f(S)} \cdot \left[S_1 t_1 s_2 - S_2 t_2 s_1\right] = \frac{M_t}{2 \cdot f(S)} \cdot [0] = 0$$

Se constată că porțiunea centrală este nesolicitată.

Răsucirea specifică se calculează cu relația 8.4-19d:

$$\theta = \frac{M_t}{4G \cdot f(S)} = \left[t_1 s_2 s_3 + t_2 s_1 s_3 + t_3 s_1 s_2\right] = 21{,}6 \cdot 10^{-3} \ \text{rad/m} = 1{,}23 \ {}^0/\text{m}$$

9. NOȚIUNI DE TEORIA ELASTICITĂȚII. STAREA DE TENSIUNE ŞI DEFORMAȚIE

În acest capitol se vor prezenta unele aspecte ale *Teoriei Elasticității*, insistându-se mai mult pe *starea de tensiune şi deformație din vecinătatea unui punct.* Noțiunile care se vor prezenta, sunt necesare studierii teoriilor de rezistență, a plăcilor plane, a tuburilor cu pereți groşi etc., care vor fi tratate în alte capitole.

9.1 TENSORUL TENSIUNE

Fie un punct de coordonate x, y, z din interiorul unui corp prin care trec trei axe ortogonale xyz.

Forța aplicată asupra acestui punct, este cunoscută dacă se cunosc *componentele acesteia* pe cele trei direcții. Dacă asupra punctului acționează tensiuni, starea de tensiune este cunoscută numai dacă se cunosc pe lângă componentele tensiunii pe cele trei direcții şi *orientarea suprafeței* pe care acestea se produc.

Prin punct se pot duce trei plane ortogonale xOy, yOz, zOx şi alte trei paralele cu acestea, care să formeze un paralelipiped de dimensiuni infinit mici (care la limită se poate reduce la un punct). Starea de tensiune în jurul punctului se cunoaşte când sunt cunoscute tensiunile pe fiecare din cele trei plane. Pe fiecare suprafață a paralelipipedului tensiunea poate avea orice orientare şi poate fi descompusă pe o direcție normală dând componenta σ şi pe direcții paralele cu axele, dând componentele τ. Astfel, pe cele şase fețe ale paralelipipedului există nouă componente ale *tensorului tensiune* (Fig.9.1-1c):

$$T_\sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{Bmatrix} \qquad 9.1\text{-}1$$

În baza dualității tensiunilor tangențiale, există de fapt numai şase componente distincte.

Din această stare, rezultă câteva cazuri particulare:

- *starea liniară de tensiune*, când există o singură componentă (de exemplu σ_x, Fig.9.1-1a)
- *starea plană de tensiune*, când toate componentele tensorului sunt paralele numai cu două dintre axele de coordonate (Fig.9.1-1b)
- *starea spațială de tensiune* (Fig.9.1-1c).

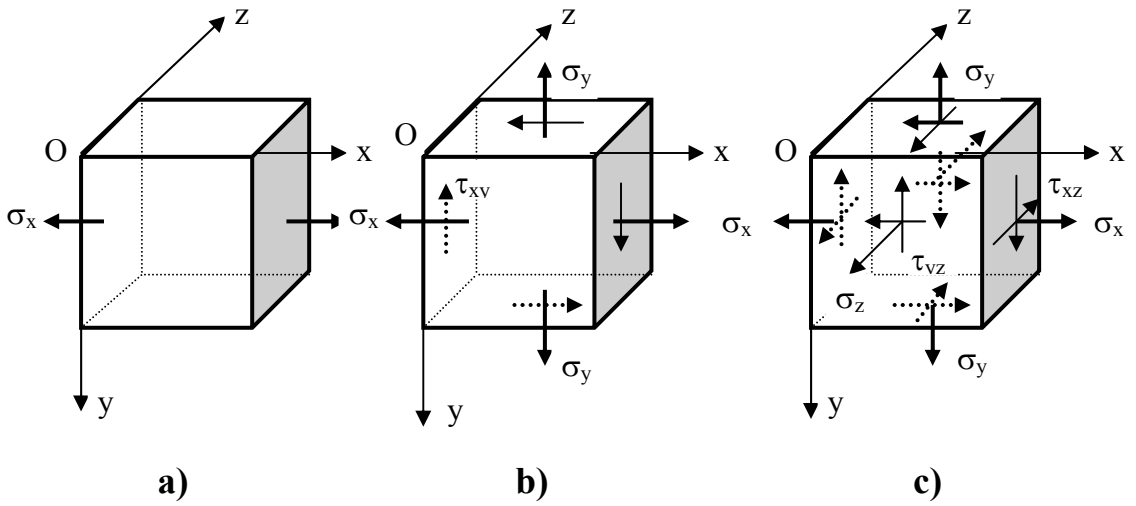


Fig.9.1-1

9.2 STAREA PLANĂ DE TENSIUNE

Starea plană de tensiune se întâlnește la plăcile subțiri solicitate prin forțe în planul ei, la tuburile cu pereți groşi de lungime infinită, la vasele cilindrice cu pereți subțiri etc.

9.2.1 Tensiuni pe secțiuni înclinate. Direcții principale şi tensiuni principale

În Fig.9.2.1-1 este reprezentată starea de tensiune plană pentru elementul paralelipipedic de grosime unitară din Fig.9.1-1b, proiectat în planul xOy.

Pentru această stare, tensorul tensiune are numai componente paralele cu axele Ox şi Oy:

$$T_\sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{Bmatrix} \qquad 9.2.1\text{-}1$$

Dacă aceste tensiuni provin dintr-o solicitare de încovoiere simplă, ele se calculează cu relațiile cunoscute:

$$\sigma_x = \frac{M_{iz}}{I_z} \cdot y \quad ; \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{T \cdot S_z}{I_z \cdot b} \quad ; \quad \sigma_y = 0 \qquad 9.2.1\text{-}2$$

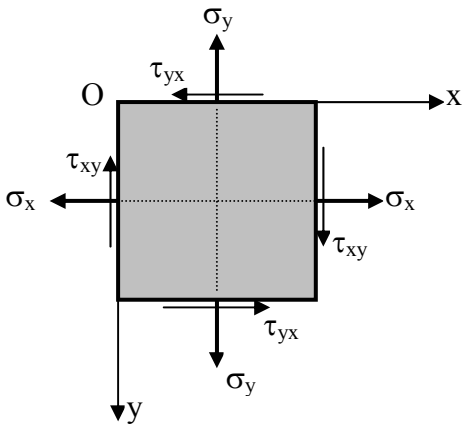


Fig.9.2.1-1

Se caută acum relații pentru tensiunile de pe o suprafață rotită cu un unghi α față de axa Oy (Fig.9.2.1-2).

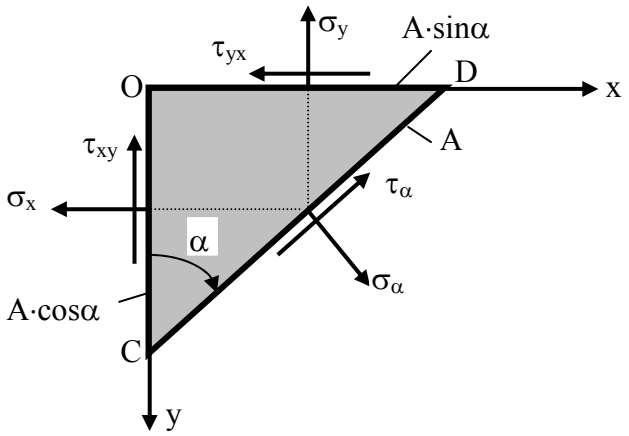


Fig.9.2.1-2

Pentru starea din Fig.9.2.1-2 se cunosc tensiunile σ_x, σ_y, $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ şi se caută tensiunile σ_α şi τ_α pe fața înclinată CD de arie A.

Se pun condițiile de echilibru pentru elementul din Fig.9.2.1-2, ca o sumă de forțe pe direcția tensiunilor σ_α şi τ_α:

$$\sigma_\alpha A - \sigma_x A\cos^2\alpha - \sigma_y A\sin^2\alpha - 2\tau_{xy} A\sin\alpha\cdot\cos\alpha = 0 \qquad 9.2.1\text{-}3a$$

$$\tau_\alpha A - \sigma_x A\sin\alpha\cdot\cos\alpha + \sigma_y A\sin\alpha\cdot\cos\alpha + \tau_{xy} A\cos^2\alpha - \tau_{xy} A\sin^2\alpha = 0 \qquad 9.2.1\text{-}3b$$

de unde se obțin relațiile:

$$\begin{aligned}\sigma_\alpha &= \sigma_x\cos^2\alpha + \sigma_y\sin^2\alpha + 2\cdot\tau_{xy}\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha\\ \tau_\alpha &= \left(\sigma_x - \sigma_y\right)\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha + \tau_{xy}\cdot\left(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha\right)\end{aligned} \qquad 9.2.1\text{-}4$$

Dacă se ține seama că:

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2} \quad ; \quad \sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2} \quad ; \quad 2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha = \sin 2\alpha$$

relațiile 9.2.1-4, capătă forma:

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cdot\cos 2\alpha + \tau_{xy}\cdot\sin 2\alpha \qquad 9.2.1\text{-}5a$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cdot\sin 2\alpha - \tau_{xy}\cdot\cos 2\alpha \qquad 9.2.1\text{-}5b$$

Relațiile 9.2.1-5a,b permit calculul tensiunilor, normală şi tangențială, pe o suprafață de orice direcție α.

Există două direcții, numite *direcții principale*, pentru care tensiunea normală are valori extreme, numite *tensiuni normale principale.*

Pentru determinarea direcțiilor principale şi a tensiunilor normale principale, se anulează derivata de ordinul întâi al tensiunii σ_α (relația 9.2.1-5a) în raport cu unghiul 2α:

$$\frac{d\sigma_\alpha}{d(2\alpha)} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cdot\sin 2\alpha + \tau_{xy}\cdot\cos 2\alpha = 0 = -\tau_\alpha \qquad 9.2.1\text{-}6$$

Relația 9.2.1-6 arată că derivata calculată este tocmai $-\tau_\alpha$, ceea ce înseamnă că pe direcțiile principale ale tensiunii normale, tensiunea tangențială este nulă.

Din relația 9.2.1-6, rezultă:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \cdot \tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \qquad 9.2.1\text{-}7$$

de unde poziția uneia dintre direcțiile principale este dată de relația:

$$\alpha_1 = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2 \cdot \tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \qquad 9.2.1\text{-}8$$

Se poate demonstra uşor că cele două direcții principale sunt perpendiculare.

Ținând seama de relațiile dintre sin2α, cos2α şi tg2α (vezi momentele de inerție principale):

$$\sin 2\alpha = \pm \frac{2 \cdot \tau_{xy}}{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \cdot \tau_{xy}^2}} \quad ; \quad \cos 2\alpha = \pm \frac{\sigma_x - \sigma_y}{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \cdot \tau_{xy}^2}}$$

şi înlocuind în relația 9.2.1-5a, se obțin expresiile pentru tensiunile normale principale:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \cdot \tau_{xy}^2} \qquad 9.2.1\text{-}9$$

Când se ia semnul + se obține valoarea maximă pentru tensiune, iar când se ia semnul – se obține valoarea minimă.

Ca şi tensiunea normală şi tensiunea tangențială are valori extreme. Deci şi pentru tensiunea tangențială există direcții principale. În vederea determinării direcțiilor principale şi a tensiunilor tangențiale principale, se anulează derivata de ordinul întâi în raport cu unghiul 2α al tensiunii tangențiale (relația 9.2.1-5b):

$$\frac{d\tau_\alpha}{d(2\alpha)} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \cos 2\alpha + \tau_{xy} \cdot \sin 2\alpha = 0 \qquad 9.2.1\text{-}10$$

Din relația 9.2.1-10, se obține:

$$\operatorname{tg} 2\alpha' = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2 \cdot \tau_{xy}} = -\frac{1}{\operatorname{tg} 2\alpha} \qquad 9.2.1\text{-}11$$

de unde pentru una din direcțiile principale ale tensiunii tangențiale se obține expresia:

$$\alpha' = \frac{1}{2} \cdot \mathrm{arctg}\left(-\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2 \cdot \tau_{xy}} \right) \qquad 9.2.1\text{-}12$$

Din relația 9.2.1-11 se observă că direcțiile 2α şi $2\alpha'$ sunt perpendiculare, ceea ce înseamnă că direcțiile principale ale tensiunii normale şi ale tensiunii tangențiale fac între ele un unghi de 45^0. Rezultă atunci că, *tensiunile tangențiale sunt maxime la un unghi de 45^0 față de direcția principală a tensiunii normale.*

Înlocuind relația 9.2.1-12 în relația 9.2.1-5b, se obține expresia tensiunilor tangențiale principale:

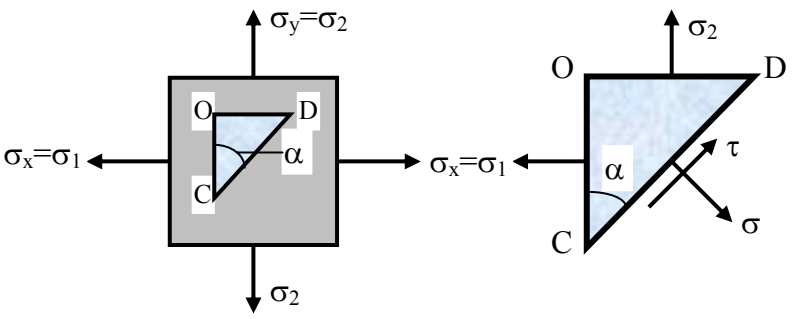
$$\tau_1 = \tau_2 = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \qquad 9.2.1\text{-}13$$

Se constată că cele două tensiuni tangențiale principale sunt egale şi de semn contrar, confirmând şi pentru acest caz, principiul dualității tensiunilor tangențiale.

9.2.2 Cercul lui Mohr pentru starea plană de tensiune

La paragraful 9.2.1 s-a stabilit că pe direcțiile principale ale tensiunii normale, tensiunile tangențiale sunt nule.

Pentru reprezentarea din Fig.9.2.2-1a, rezultă că direcțiile axelor sunt direcții principale, iar tensiunile σ_x şi σ_y sunt tensiuni principale.



a) **b)**

Fig.9.2.2-1

Pentru acest caz, expresiile tensiunilor de pe fața înclinată cu unghiul α (Fig.9.2.2-1b) rezultate din relațiile 9.2.1-5a,b, sunt:

$$\sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cdot \cos 2\alpha$$
$$\tau = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cdot \sin 2\alpha \qquad 9.2.2\text{-}1$$

Eliminând unghiul 2α între cele două relații, se poate scrie:

$$\left(\sigma - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}\right)^2 + \tau^2 = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)^2 \qquad 9.2.2\text{-}2$$

Ecuația 9.2.2-2 reprezintă ecuația unui cerc, *cercul lui Mohr pentru starea plană de tensiune.* Acest cerc are centrul pe axa Oσ situat la distanța OD=$(\sigma_1+\sigma_2)/2$ şi raza R = $(\sigma_1 - \sigma_2)/2$. Cercul lui Mohr pentru starea plană de tensiune este reprezentat în Fig.9.2.2-2.

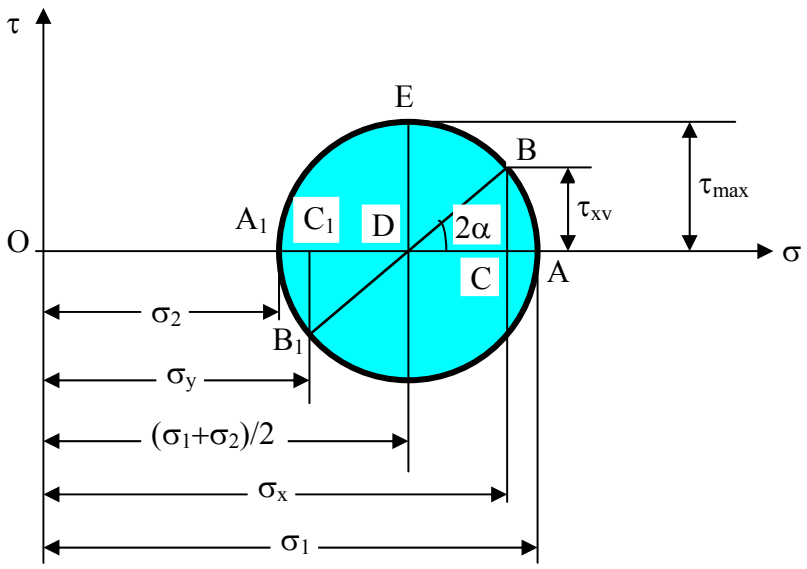


Fig.9.2.2-2

Pe baza cercului lui Mohr, tensiunile pe o secțiune înclinată cu unghiul α față de axa Oy se determină ducând raza DB care face unghiul 2α cu axa Oσ şi măsurând coordonatele punctului B

$$OC = \sigma = \sigma_x \quad ; \quad CB = \tau = \tau_{xy}$$

O secțiune perpendiculară pe cea poziționată de punctul B se obține ducând diametrul BDB_1, rezultând punctul B_1.

Cu ajutorul cercului lui Mohr, cunoscând tensiunile σ_x, σ_y, τ_{xy} se pot obține direcțiile principale şi tensiunile normale principale. Pentru aceasta se construieşte cercul lui Mohr, fixând punctele $B(\sigma_x,\tau_{xy})$ şi $B_1(\sigma_y, -\tau_{xy})$ şi ducând dreapta BB_1, care reprezintă diametrul cercului. Cercul fiind construit, se pot măsura tensiunile principale σ_1, σ_2 precum şi unghiul 2α, de unde rezultă apoi unghiul α care este unghiul unei direcții principale cu axa Oy.

9.2.3 Cazuri particulare ale stării plane de tensiune

Particularizând relațiile 9.2.1-9 şi 9.2.1-13 se obțin cazuri particulare ale stării plane de tensiune.

- *Starea liniară de tensiune* (întindere sau compresiune). Dacă în relația 9.2.1-9 se particularizează $\sigma_y = 0$, $\tau_{xy} = 0$ ceea ce corespunde unei solicitări axiale, se obține starea plană de tensiune:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x}{2} \pm \frac{\sigma_x}{2} \quad \Rightarrow \quad \sigma_1 = \sigma_x \quad ; \quad \sigma_2 = 0$$

iar, din relația 9.2.1-13:

$$\tau_{max} = \pm\frac{1}{2}\cdot(\sigma_1 - \sigma_2) = \pm\frac{1}{2}\cdot\sigma_x$$

- *Starea de forfecare pură* se realizează când $\sigma_x = \sigma_y = 0$. Făcând înlocuirile corespunzătoare, se obține:

$$\sigma_{1,2} = \pm\tau_{xy} \quad \Rightarrow \quad \sigma_1 = \tau_{xy} \ ; \ \sigma_2 = -\tau_{xy}$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \infty \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \frac{\pi}{4} \ ; \ \alpha_2 = \frac{3\pi}{4}$$

- *Tensiuni principale la încovoiere simplă.* La solicitarea de încovoiere simplă, tensiunea normală $\sigma_y = 0$. În acest caz, se obține:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x}{2} \pm \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\sigma_x^2 + 4\cdot\tau_{xy}^2}$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\cdot\tau_{xy}}{\sigma_x}$$

În aceste relații, σ_x şi τ_{xy} sunt tensiunile normală, respectiv tangențială dintr-un punct al secțiunii produse de momentul încovoietor, respectiv forța tăietoare.

9.3 STAREA PLANĂ DE DEFORMAȚIE

Un element se află într-o *stare plană de deformație* dacă el suferă numai deformații specifice situate într-un plan: ε_x ,ε_y, γ_{xy}. În acest caz, tensorul deformațiilor are forma:

$$T_\varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y \end{Bmatrix} \qquad 9.3\text{-}1$$

Şi aici este valabilă legea dualității lunecărilor specifice $\gamma_{xy} = \gamma_{yx}$.

În cele ce urmează, se caută relații între *deformații specifice* şi *deplasări* pentru starea plană de deformație. Pentru aceasta, se consideră un element de volum paralelipipedic de laturi *dx, dy, dz,* element care suferă deformații numai în planul xOy (Fig.9.3-1).

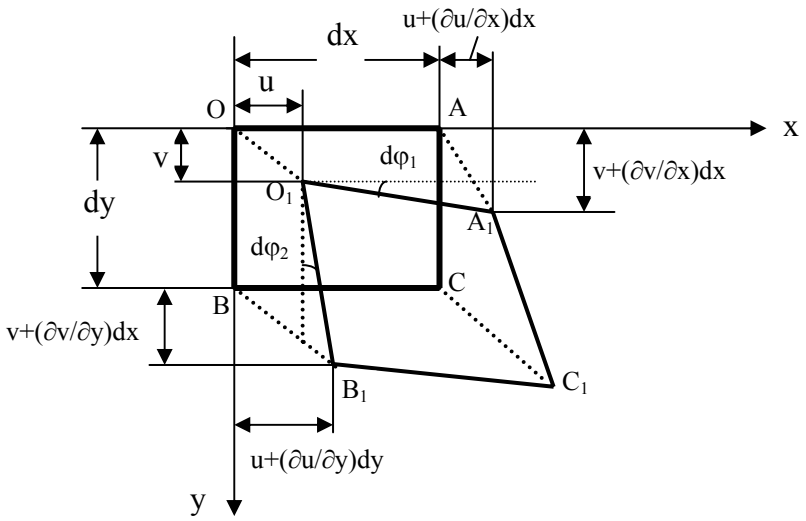


Fig.9.3-1

În urma deformării, punctul O suferă o deplasare (în cazul stării plane de deformație) de componente *u* pe direcția axei Ox şi *v* pe direcția Oy (Fig.9.3-1).

Punctul A situat pe axa Ox la distanța dx suferă o deplasare pe axa Ox, u+(∂u/∂x)dx. Lungirea elementului pe direcția Ox este:

$$\Delta dx = u + \frac{\partial u}{\partial x}dx - u = \frac{\partial u}{\partial x}dx \qquad 9.3\text{-}2$$

iar lungirea specifică (alungirea) este:

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad 9.3\text{-}3$$

În mod analog se determină alungirea şi pe direcția Oy:

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad 9.3\text{-}4$$

În acelaşi timp, punctul A suferă o deplasare şi pe direcția axei Oy, egală cu:

$$v + \frac{\partial v}{\partial x}dx$$

iar punctul B o deplasare pe direcția Ox egală cu:

$$u + \frac{\partial u}{\partial y}dy$$

Datorită acestor deplasări, patrulaterul OABC se transformă în patrulaterul $O_1A_1B_1C_1$ (Fig.9.3-1), iar latura OA se înclină cu unghiul $d\varphi_1$, care are expresia:

$$\operatorname{tg} d\varphi_1 \approx d\varphi_1 = \frac{v + \frac{\partial v}{\partial x}dx - v}{dx} = \frac{\partial v}{\partial x} \qquad 9.3\text{-}5$$

La fel şi latura OB se roteşte cu unghiul $d\varphi_2$:

$$\operatorname{tg} d\varphi_2 \approx d\varphi_2 = \frac{u + \frac{\partial u}{\partial y}dy - u}{dy} = \frac{\partial u}{\partial y} \qquad 9.3\text{-}6$$

După cum se cunoaşte, *lunecarea specifică* în planul xOy este dată de suma celor două unghiuri:

$$\gamma_{xy} = d\varphi_1 + d\varphi_2 = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \qquad 9.3\text{-}7$$

În mod asemănător se pot determina lunecările specifice şi în celelalte plane.

Relațiile 9.3-2, 9.3-3, 9.3-7, prezintă legătura între deformațiile specifice şi deplasări, în cazul stării plane de deformație.

9.4 STAREA SPAȚIALĂ DE TENSIUNE

Dacă asupra unui element acționează tensiuni în toate planele, se spune că se realizează o *stare spațială de tensiune.*

9.4.1 Tensiuni pe secțiuni înclinate

Un element aflat într-o stare spațială de tensiune a fost reprezentat în Fig.9.1-1c.

Pentru a studia variația tensiunii pe secțiuni înclinate cu orice unghi, se consideră un tetraedru OBCD (Fig.9.4.1-1a) care are cele trei fețe situate în planele axelor de coordonate. Pe fețele tetraedrului acționează tensiunile σ_x, σ_y, σ_z, $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{yz} = \tau_{zy}$, $\tau_{zx} = \tau_{xz}$. Se caută expresia tensiunii pe un plan înclinat BCD, a cărei normală are cosinusurile directoare *l, m, n.* (Fig.9.4.1-1b).

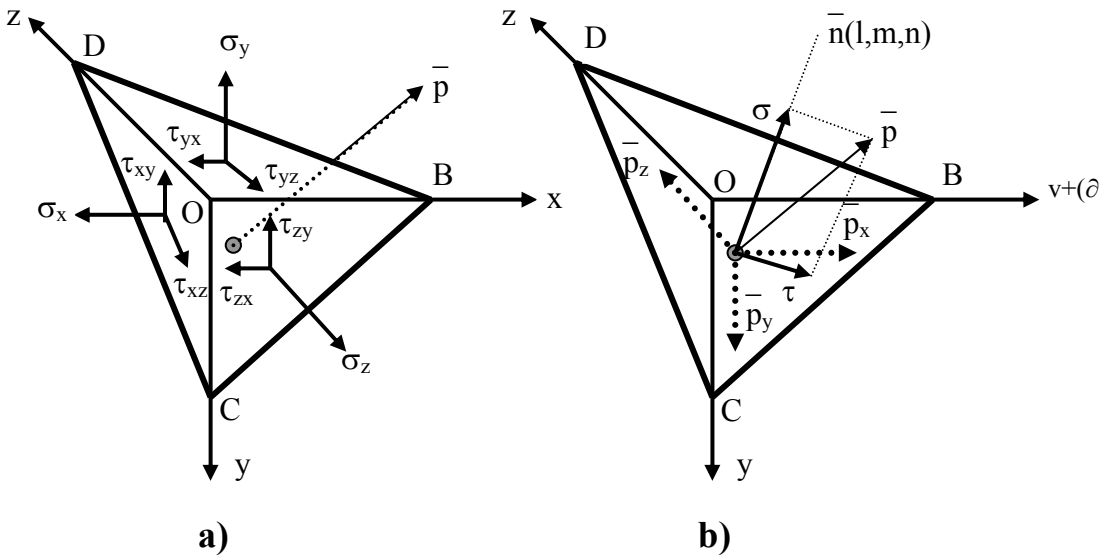


Fig.9.4.1-1

Pe planul înclinat BCD acționează tensiunea $\bar{p}$, de direcție necunoscută și care poate fi descompusă în trei componente paralele cu axele Ox, Ox, Oz: $\bar{p}_x$, $\bar{p}_y$, $\bar{p}_z$. Notând cu A aria suprafeței triunghiulare BCD, triunghiurile situate în planele axelor au atunci suprafețele:

$$\Delta OCD \rightarrow A\cdot l \; ; \; \Delta OBD \rightarrow A\cdot m \; ; \; \Delta OBC \rightarrow A\cdot n$$

Punând condițiile de echilibru, ca ecuații de proiecții ale forțelor pe direcțiile celor trei axe şi simplificând cu A, se obțin relațiile:

$$\begin{aligned} p_x &= l\cdot\sigma_x + m\cdot\tau_{yx} + n\cdot\tau_{zx} \\ p_y &= l\cdot\tau_{zy} + m\cdot\sigma_y + n\cdot\tau_{zy} \\ p_z &= l\cdot\tau_{xz} + m\cdot\tau_{yz} + n\cdot\sigma_z \end{aligned} \qquad 9.4.1\text{-}1$$

Cunoscând aceste componente, se poate determina tensiunea *p* de pe suprafața înclinată:

$$p = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2} \qquad 9.4.1\text{-}2$$

Tensorul tensiune $\bar{p}$ se descompune în două componente: una normală σ pe direcția normalei $\bar{n}$ la suprafață şi una tangențială τ conținută în planul secțiunii (Fig.9.4.1-1b).

Componenta normală σ se determină proiectând pe $\bar{p}_x$, $\bar{p}_y$, $\bar{p}_z$ pe direcția normalei $\bar{n}$:

$$\sigma = l \cdot p_x + m \cdot p_y + n \cdot p_z \qquad 9.4.1\text{-}3$$

Înlocuind relațiile 9.4.1-2 în relația 9.4.1-3, se obține pentru tensiunea normală σ, expresia:

$$\sigma = l^2 \cdot \sigma_x + m^2 \cdot \sigma_y + n^2 \cdot \sigma_z + 2lm \cdot \tau_{xy} + 2mn \cdot \tau_{yz} + 2nl \cdot \tau_{zx} \qquad 9.4.1\text{-}4$$

Dacă se cunoaşte tensiunea *p* şi tensiunea normală σ, tensiunea tangențială τ se obține uşor, cu relația:

$$\tau = \sqrt{p^2 - \sigma^2} \qquad 9.4.1\text{-}5$$

9.4.2 Tensiuni principale

Se consideră un vector al cărui modul este invers proporțional cu rădăcina pătrată a tensiunii σ şi care are direcția normalei $\bar{n}$ (Fig.9.4.1-1b):

$$v = \frac{k}{\sqrt{|\sigma|}} \qquad 9.4.2\text{-}1$$

de unde:

$$\sigma = \pm \frac{k^2}{v^2} \qquad 9.4.2\text{-}2$$

Extremitatea acestui vector, care are aceiaşi cosinusuri directoare ca şi normala $\bar{n}$, are următoarele coordonate:

$$x = l \cdot v \; ; \quad y = m \cdot v \; ; \quad z = n \cdot v$$

de unde se obține:

$$l = \frac{x}{v} \; ; \quad m = \frac{y}{v} \; ; \quad n = \frac{z}{v} \qquad 9.4.2\text{-}3$$

Odată cu schimbarea poziției suprafeței BCD se modifică şi poziția vectorului $\bar{v}$. Pentru determinarea locului geometric al extremității vectorului $\bar{v}$, se elimină *l, m, n*, înlocuind relațiile 9.4.2-2 şi 9.4.2-3 în relația 9.4.1-4, obținându-se:

$$\pm\frac{k^2}{v^2}=\frac{x^2}{v^2}\cdot\sigma_x+\frac{y^2}{v^2}\cdot\sigma_y+\frac{z^2}{v^2}\cdot\sigma_z+2\frac{xy}{v^2}\cdot\tau_{xy}+2\frac{yz}{v^2}\cdot\tau_{yz}+2\frac{zx}{v^2}\cdot\tau_{zx}$$

iar după simplificări, rezultă:

$$\sigma_x x^2+\sigma_y y^2+\sigma_z z^2+2\tau_{xy}xy+2\tau_{yz}yz+2\tau_{zx}zx=\pm k^2 \qquad 9.4.2\text{-}4$$

Ecuația 9.4.2-4 este o suprafață de gradul II (doi). Aceasta este complet determinată de starea de tensiune din punctul O. Dacă se face o schimbare convenabilă de axe, raportând suprafața la propriile sale axe, dispar termenii care conțin produse duble, adică cei care conțin tensiunea tangențială τ.

Rezultă că este posibil să se găsească într-un punct al unui corp elastic trei plane perpendiculare între ele pe care tensiunile tangențiale τ să fie nule. Pe aceste direcții se obțin atunci *tensiunile normale principale*, iar direcțiile respective sunt *direcții principale.*

Tensorul tensiunilor dintr-un punct este complet determinat, dacă se cunosc cele trei direcții principale şi mărimea celor trei tensiuni normale principale.

Pentru determinarea lor, se presupune că planul BCD este chiar un plan principal, adică normala $\bar{n}$ este una din direcțiile principale. În această situație, tensiunea $\bar{p}$ este orientată chiar pe normala $\bar{n}$ şi devine tensiunea normală σ, iar tensiunea tangențială τ este nulă. Rezultă că cele trei componente ale tensiunii normale σ pe axe, sunt:

$$p_x = l\cdot\sigma\ ;\quad p_y = m\cdot\sigma\ ;\quad p_z = n\cdot\sigma \qquad 9.4.2\text{-}5$$

Înlocuind relația 9.4.2-5 în relația 9.4.1-1, se obține:

$$\begin{aligned} &l\cdot(\sigma_x - \sigma) + m\cdot\tau_{xy} + n\cdot\tau_{xz} = 0\\ &l\cdot\tau_{yx} + m\cdot(\sigma_y - \sigma) + n\cdot\tau_{yz} = 0 \qquad 9.4.2\text{-}6\\ &l\cdot\tau_{zx} + m\cdot\tau_{zy} + n\cdot(\sigma_z - \sigma) = 0 \end{aligned}$$

Între cosinusurile directoare există următoarea relație:

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1 \qquad 9.4.2\text{-}7$$

Pentru ca sistemul de ecuații 9.4.2-6 să aibă soluții diferite de zero, trebuie ca determinantul său să fie nul:

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = 0 \qquad 9.4.2\text{-}8$$

Dezvoltând determinantul, se obține o ecuație de gradul trei, de forma:

$$\sigma^3 + I_1 \cdot \sigma^2 + I_2 \cdot \sigma - I_3 = 0 \qquad 9.4.2\text{-}9$$

unde I_1, ... I_3 sunt invarianți, care au expresia:

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

$$I_2 = \sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 \qquad 9.4.2\text{-}10$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix}$$

Ecuația 9.4.2-9 are trei soluții reale, care sunt tocmai cele trei tensiuni normale principale: $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$.

Poziția direcțiilor principale se obține prin rezolvarea ecuațiilor din relațiile 9.4.2-6 şi 9.4.2-7.

Şi la starea spațială de tensiune se poate demonstra că în plane situate la 45^0 față de direcțiile principale ale tensiunii normale, tensiunile tangențiale au valori extreme (sunt principale). Valoarea tensiunilor tangențiale principale este dată de relațiile:

$$\tau_1 = \pm\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \;;\quad \tau_2 = \pm\frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2} \;;\quad \tau_3 = \pm\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \qquad 9.4.2\text{-}11$$

Dacă se iau ca axe direcțiile principale, relațiile 9.4.1-1 capătă forma:

$$p_x = l \cdot \sigma_1 \quad ; \quad p_y = m \cdot \sigma_2 \quad ; \quad p_z = n \cdot \sigma_3 \qquad 9.4.2\text{-}12$$

iar relația 9.4.1-3, devine:

$$\sigma = l^2 \cdot \sigma_1 + m^2 \cdot \sigma_2 + n^2 \cdot \sigma_3 \qquad 9.4.2\text{-}13$$

Pentru tensiunile normale principale, tensorul tensiune T_σ este:

$$T_\sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{Bmatrix} \qquad 9.4.2\text{-}14$$

Dacă $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$, tensorul tensiune se numeşte *tensor sferic* şi are ca efect numai variația volumului fără însă a modifica forma. Când $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$ tensorul se numeşte *deviator*, modificând forma dar nu şi volumul corpului. În caz general, tensorul tensiune modifică atât forma cât şi volumul corpului.

9.4.3 Tensiuni octaedrice

Ducând diagonalele pătratelor unui cub se pot construi 8 plane octaedrice (Fig.9.4.3-1).

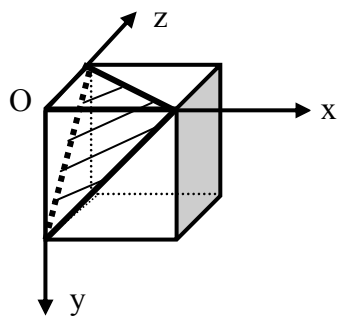


Fig.9.4.3-1

Pe un astfel de plan iau naştere *tensiunile octaedrice* a căror mărime este dată de relațiile:

$$\sigma_{oct} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \qquad 9.4.3\text{-}1a$$

$$\tau_{oct} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \\ = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{\tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2} \qquad 9.4.3\text{-}1b$$

9.4.4 Elipsoidul tensiunilor

Se urmăreşte determinarea locului geometric al extremității vectorului tensiune $\overline{p}$, atunci când înclinarea planului BCD variază. Pentru aceasta, între expresiile 9.4.2-13 ale coordonatelor extremității lui $\overline{p}$ şi relația 9.4.2-7, se elimină parametrii *l, m,* şi *n*. După aceste eliminări, se obține relația:

$$\frac{p_x^2}{\sigma_1^2} + \frac{p_y^2}{\sigma_2^2} + \frac{p_z^2}{\sigma_3^2} = 1 \qquad 9.4.4\text{-}1$$

Ecuația 9.4.4-1 reprezintă un elipsoid, care se numeşte *elipsoidul tensiunilor* sau *elipsoidul lui Lamé.*

Tensiunile principale din punctul respectiv sunt tocmai semiaxele elipsoidului.

La o stare plană de tensiune, caz în care $\sigma_3 = 0$, ecuația 9.4.4-1 particularizată pentru acest caz, reprezintă *elipsa tensiunilor.* La starea liniară de tensiune când $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$, ecuația 9.4.4-1, devine ecuația unei drepte.

9.4.5 Cercul lui Mohr pentru starea spațială de tensiune

Dacă se consideră plane paralele cu direcțiile principale, ca şi la starea plană de tensiune şi la starea spațială se pot construi cercuri (Fig.9.4.5-1).

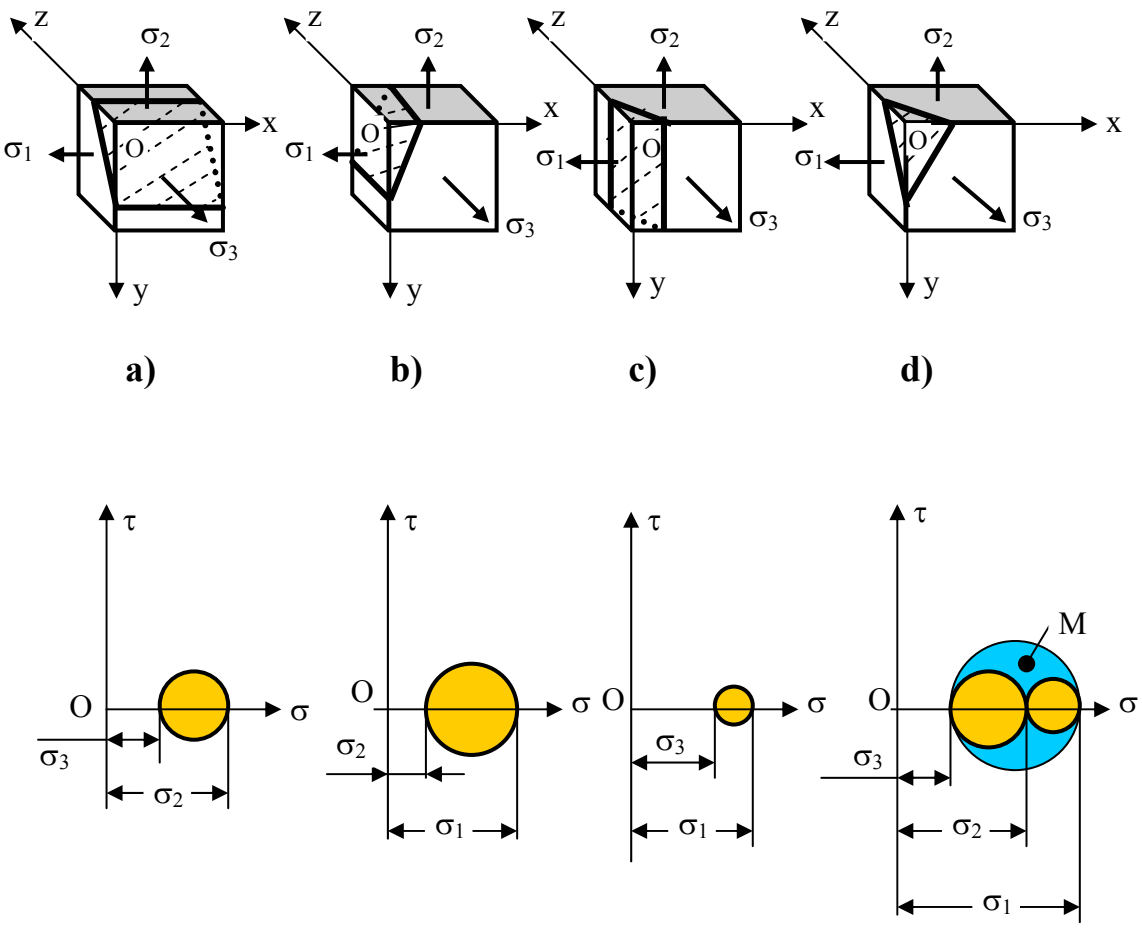


Fig.9.4.5-1

Pe un plan paralel cu direcția lui σ_1 (Fig.9.4.5-1a) tensiunile sunt date de un cerc de diametru σ_2 - σ_3. Analog, rezultă cercurile lui Mohr şi pentru celelalte situații. Pentru starea cea mai generală, rezultă situația din Fig.9.4.5-1d, când tensiunile de pe această suprafață sunt date de coordonatele unui punct M situat în zona haşurată.

9.5 STAREA SPAȚIALĂ DE DEFORMAȚIE

În cazul stării spațiale de deformație, *tensorul deformațiilor* rezultă uşor prin analogia cu starea plană de deformație şi are forma:

$$T_\varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{Bmatrix} \qquad 9.5\text{-}1$$

După cum se poate uşor constata, în cazul stării spațiale de deformație, tensorul deformațiilor are şase componente distincte: ε_x, ε_y, ε_z, $\gamma_{xy} = \gamma_{yx}$, $\gamma_{yz} = \gamma_{zy}$, $\gamma_{zx} = \gamma_{xz}$. În orice punct al unui corp, există trei *direcții principale de deformație,* direcții pe care se produc *lungirile specifice (alungirile) principale:* ε_1, ε_2, ε_3. Pe direcțiile principale de deformație, *lunecările specifice* sunt nule.

Dacă se consideră aceste direcții principale ca axe, atunci tensorul deformațiilor este de forma:

$$T_\varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{Bmatrix} \qquad 9.5\text{-}2$$

La starea spațială de deformație, un punct suferă deplasări pe toate cele trei axe, deplasări notate cu *u, v, w.* Procedând analog ca la starea plană de deformație, în cazul stării spațiale de deformație, între deformațiile specifice şi deplasări, rezultă următoarele relații:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \;;\; \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \;;\; \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \qquad 9.5\text{-}3a$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \;;\; \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \;;\; \gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \qquad 9.5\text{-}3b$$

9.6 LEGEA LUI HOOKE GENERALIZATĂ

Fie un element de volum paralelipipedic pe fețele căruia acționează tensiunile normale principale σ_1, σ_2, σ_3 (Fig.9.6-1).

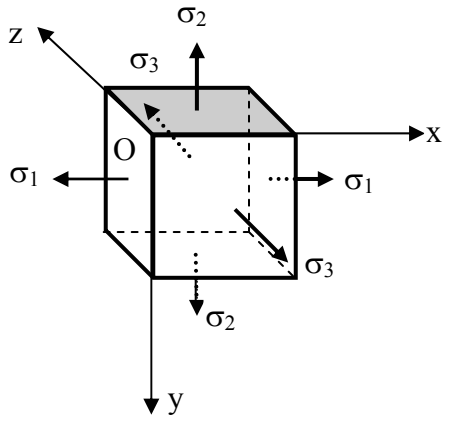


Fig.9.6-1

Pentru starea liniară de tensiune, între tensiune şi deformația specifică există relația (relația lui Hooke):

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \qquad 9.6\text{-}1$$

iar deformația transversală, este:

$$\varepsilon_{tr} = -\nu \cdot \varepsilon \qquad 9.6\text{-}2$$

Elementului de volum i se aplică trei stări de solicitare succesive:

a) $\sigma_1 \neq 0$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$. În acest caz, tensiunea normală principală σ_1, produce o lungire specifică ε'_1 pe direcția sa şi două contracții ε'_2 şi ε'_3 pe celelalte două direcții.:

$$\varepsilon'_1 = \frac{\sigma_1}{E} \quad ; \quad \varepsilon'_2 = -\nu \cdot \frac{\sigma_1}{E} \quad ; \quad \varepsilon'_3 = -\nu \cdot \frac{\sigma_1}{E} \qquad 9.6\text{-}3$$

b) $\sigma_2 \neq 0$, $\sigma_1 = \sigma_3 = 0$ În acest caz, relațiile dintre deformațiile specifice şi tensiunile normale sunt:

$$\varepsilon''_1 = -\nu \cdot \frac{\sigma_2}{E} \quad ; \quad \varepsilon''_2 = \frac{\sigma_2}{E} \quad ; \quad \varepsilon''_3 = -\nu \cdot \frac{\sigma_2}{E} \qquad 9.6\text{-}4$$

c) $\sigma_3 \neq 0$, $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$. Relațiile dintre deformațiile specifice şi tensiuni sunt:

$$\varepsilon_1''' = -\nu \cdot \frac{\sigma_3}{E} \quad ; \quad \varepsilon_2''' = -\nu \cdot \frac{\sigma_3}{E} \quad ; \quad \varepsilon_3''' = \frac{\sigma_3}{E} \qquad 9.6\text{-}5$$

Dacă asupra elementului acționează în acelaşi timp toate cele trei tensiuni normale principale, deformația totală pe fiecare direcție se obține prin însumarea deformațiilor produse de fiecare tensiune pe direcția respectivă:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_1' + \varepsilon_1'' + \varepsilon_1''' = \frac{1}{E} \cdot \left[\sigma_1 - \nu \cdot \left(\sigma_2 + \sigma_3\right)\right] \qquad 9.6\text{-}6a$$

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_2' + \varepsilon_2'' + \varepsilon_2''' = \frac{1}{E} \cdot \left[\sigma_2 - \nu \cdot \left(\sigma_2 + \sigma_1\right)\right] \qquad 9.6\text{-}6b$$

$$\varepsilon_3 = \varepsilon_3' + \varepsilon_3'' + \varepsilon_3''' = \frac{1}{E} \cdot \left[\sigma_3 - \left(\sigma_1 + \sigma_2\right)\right] \qquad 9.6\text{-}6c$$

Dacă în locul tensiunilor normale principale se scriu tensiunile normale orientate după axele de coordonate, relațiile 9.6-6a,b,c sunt de forma:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} \cdot \left[\sigma_x - \nu \cdot \left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right] \qquad 9.6\text{-}7a$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} \cdot \left[\sigma_y - \nu \cdot \left(\sigma_x + \sigma_z\right)\right] \qquad 9.6\text{-}7b$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} \cdot \left[\sigma_z - \nu \cdot \left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right] \qquad 9.6\text{-}7c$$

Dacă axele x, y, z nu sunt direcții principale, există şi tensiuni tangențiale care produc lunecările specifice:

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \quad ; \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} \quad ; \quad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G} \qquad 9.6\text{-}8$$

Relațiile 9.6-6, 9.6-7 şi 9.6-9 reprezintă *legea lui Hooke generalizată.*
Deformația volumică a elementului reprezentat în Fig.9.6-1 se determină pornind de la volumul său înainte de deformare:

$$DV = dx \cdot dy \cdot dz$$

În urma deformării, volumul elementului este:

$$dV + \Delta dV = dx \cdot (1 + \varepsilon_x) \cdot dy \cdot (1 + \varepsilon_y) \cdot dz \cdot (1 + \varepsilon_z) \qquad 9.6\text{-}9$$

După desfacerea parantezelor şi neglijând infiniții mici de ordin superior, expresia volumului devine:

$$dV + \Delta dV = dx \cdot dy \cdot dz \cdot (1 + \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \qquad 9.6\text{-}10$$

iar numai creşterea volumului este:

$$\Delta dV = (dV + \Delta dV) - dV = dx \cdot dy \cdot dz \cdot (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \qquad 9.6\text{-}11$$

Deformația volumică specifică se obține prin împărțirea creşterii volumului la volumul inițial:

$$e = \frac{\Delta dV}{dV} = \frac{dx \cdot dy \cdot dz \cdot (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)}{dx \cdot dy \cdot dz} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \qquad 9.6\text{-}12$$

Dacă se înlocuiesc deformațiile specifice (relațiile 9.6-7) în relația 9.6-12, pentru deformația specifică volumică se obține următoarea expresie:

$$e = \frac{1 - 2 \cdot \nu}{E} \cdot (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \qquad 9.6\text{-}13$$

Notând cu

$$p = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} \qquad 9.6\text{-}14$$

numită *tensiune medie,* expresia deformație specifice de volum devine de forma:

$$e = 3 \cdot \frac{1 - 2 \cdot \nu}{E} \cdot p \qquad 9.6\text{-}15$$

Relația 9.6-15 este cunoscută sub denumirea de *ecuația lui Poisson.* Se mai poate defini în acest caz un *modul de elasticitate cubică* a cărui expresie este:

$$\frac{p}{e} = K = \frac{E}{3 \cdot (1 - 2 \cdot \nu)} \qquad 9.6\text{-}16$$

care conduce la ecuația lui Poisson de forma:

$$e = \frac{p}{K} \qquad 9.6\text{-}17$$

Ecuația lui Poisson sub forma 9.6-17, este asemănătoare cu relația lui lui Hooke:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \qquad 9.6\text{-}18$$

Pentru starea plană de tensiune când $\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$ relațiile dintre deformațiile specifice şi tensiuni sunt de forma:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{1}{E} \cdot (\sigma_x - \nu \cdot \sigma_y) \\
\varepsilon_y &= \frac{1}{E} \cdot (\sigma_y - \nu \cdot \sigma_x) \\
\varepsilon_z &= -\frac{\nu}{E} \cdot (\sigma_x + \sigma_y) \\
\gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G}
\end{aligned} \qquad 9.6\text{-}19$$

Se constată că unei stări plane de tensiune îi corespunde o stare spațială de deformație ($\varepsilon_z \neq 0$).

Dacă se doreşte exprimarea tensiunilor normale funcție de deformațiile specifice, din relațiile 9.6-19, rezultă:

$$\sigma_x = \frac{E}{1 - \nu^2} \cdot (\varepsilon_x + \nu \cdot \varepsilon_y) \qquad 9.6\text{-}20a$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1 - \nu^2} \cdot (\varepsilon_y + \nu \cdot \varepsilon_x) \qquad 9.6\text{-}20b$$

9.7 RELAȚIA DINTRE CONSTANTELE ELASTICE E, G, ν

Se consideră un element de volum MNPR (Fig.9.7-1) supus pe fețele sale acțiunii tensiunilor principale σ_x, σ_y egale şi de sens contrar. Dintr-un capitol anterior, se cunoaşte că pe fețele elementului ABCD, fețe înclinate cu 45^0 față de ale primului element apare o stare de forfecare pură:

$$\tau = \sigma_x = -\sigma_y \qquad 9.7\text{-}1$$

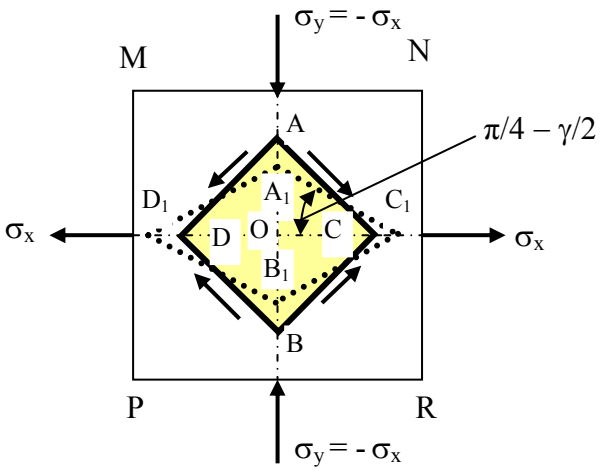


Fig.9.7-1

Sub acțiunea solicitărilor, laturile elementului ABCD lunecă ocupând poziția $A_1B_1C_1D_1$ iar unghiul inițial de 45^0 se va micşora, devenind egal cu:

$$\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}$$

Se reamintește că lunecarea specifică γ este dată de măsura cu care se modifică unghiul de $\pi/2$ făcut de laturile elementului ABCD, deci unghiul de 45^0 scade cu $\gamma / 2$.

Ținând seama că $tg(\gamma/2) \approx \gamma / 2$, se poate scrie:

$$\mathrm{tg}(\prec OC_1A_1) = \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{\mathrm{tg}\frac{\pi}{4} - \mathrm{tg}\frac{\gamma}{2}}{1 + \mathrm{tg}\frac{\pi}{4} \cdot \mathrm{tg}\frac{\gamma}{2}} = \frac{1 - \frac{\gamma}{2}}{1 + \frac{\gamma}{2}} \qquad 9.7\text{-}2$$

De asemenea, acelaşi unghi se poate exprima şi prin raportul :

$$tg\left(\widehat{OC_1A_1}\right) = \frac{OA_1}{OC_1} \qquad 9{,}7\text{-}3$$

unde

$$\begin{aligned} OC_1 &= OC \cdot (1 + \varepsilon_x) \\ OA_1 &= OA \cdot (1 + \varepsilon_y) \end{aligned} \qquad 9.7\text{-}4$$

Conform legii lui Hooke generalizate

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} \cdot (\sigma_x - \nu \cdot \sigma_y) = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_x - \nu \cdot (-\sigma_x)] = \frac{\sigma_x}{E} \cdot (1 + \nu) \qquad 9.7\text{-}5a$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} \cdot (\sigma_y - \nu \cdot \sigma_x) = \frac{1}{E} \cdot (-\sigma_x - \nu \cdot \sigma_y) = -\frac{\sigma_x}{E} \cdot (1 + \nu) = -\varepsilon_x \qquad 9.7\text{-}5b$$

Ținând seama că OC = OA şi înlocuind σ_x cu τ, rezultă:

$$tg\left(\widehat{OC_1A_1}\right) = \frac{OA_1}{OC_1} = \frac{OA \cdot \left[1 - \frac{\tau}{E} \cdot (1 + \nu)\right]}{OC \cdot \left[1 + \frac{\tau}{E} \cdot (1 + \nu)\right]} = \frac{1 - \frac{\tau}{E} \cdot (1 + \nu)}{1 + \frac{\tau}{E} \cdot (1 + \nu)} \qquad 9.7\text{-}6$$

Din egalitatea relațiilor 9.7-2 şi 9.7-6, rezultă:

$$\frac{\gamma}{2} = \frac{\tau}{E} \cdot (1 + \nu) \qquad 9.7\text{-}7$$

Dacă se are în vedere legea lui Hooke ($\tau = G \cdot \gamma$), relația 9.7-7, capătă forma:

$$\frac{\gamma}{2} = \frac{G \cdot \gamma \cdot (1+\nu)}{E} \qquad 9.7\text{-}8$$

de unde rezultă relația dintre cele trei constante elastice de material:

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1+\nu)} \qquad 9.7\text{-}9$$

Pentru oțel, la care E = 2,1 $\cdot 10^5$ MPa şi ν = 0,3 modulul de elasticitate transversal G este:

$$G = \frac{2{,}1 \cdot 10^5}{2 \cdot (1+0{,}3)} = 8{,}07692 \cdot 10^4 \ \text{MPa}$$

În general, în calculele de rezistență, pentru oțel se ia pentru modulul de elasticitate transversal, valoarea G = 8,1$\cdot 10^4$ MPa.

9.8 ENERGIA DE DEFORMAȚIE

Pentru un element de volum de laturi dx, dy, dz asupra căruia acționează progresiv tensiunile normale σ_x, σ_y, σ_z, forța care acționează pe o direcție este dată de produsul dintre tensiune şi aria suprafeței respective. Astfel pe direcția x, forța este $\sigma_x \cdot dy \cdot dz$. Deplasându-se pe direcția ei cu cantitatea $\delta = \varepsilon_x \cdot dx$, forța efectuează un lucru mecanic elementar:

$$dL = \frac{1}{2} \cdot \sigma_x \cdot dx \cdot dy \cdot dz \cdot \varepsilon_x = dU \qquad 9.8\text{-}1$$

şi conform principiului lui Clapeyron este egal cu energia de deformație înmagazinată în material. Factorul ½ din relația 9.8-1 apare deoarece forța ia valori între zero şi valoarea sa finală.

Dacă deformația specifică ε_x are o valoare finită, energia ce corespunde elementului de volum dV = dx·dy·dz se poate exprima prin aria de sub diagrama caracteristică la tracțiune pe porțiunea liniară (Fig.9.8-1)

$$dU = \frac{1}{2} \cdot \sigma_x \cdot \varepsilon_x \cdot dV \qquad 9.8\text{-}2$$

iar *energia pe unitatea de volum* (*energia specifică*) este:

$$U_1 = \frac{1}{2} \cdot \sigma_x \cdot \varepsilon_x \qquad 9.8\text{-}3$$

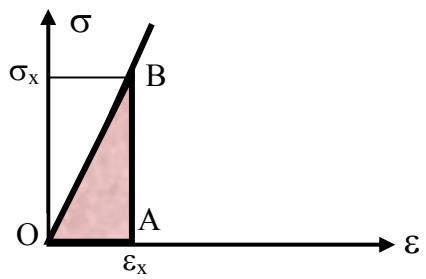


Fig.9.8-1

Având în vedere şi tensiunile de pe celelalte două direcții, prin însumare se obține:

$$U_1 = \frac{1}{2} \cdot \left(\sigma_x \cdot \varepsilon_x + \sigma_y \cdot \varepsilon_y + \sigma_z \cdot \varepsilon_z\right) \qquad 9.8\text{-}4$$

În situația în care există şi tensiuni tangențiale, energia specifică de deformație se determină printr-o arie asemănătoare cu cea din Fig.9.8-1 având însă ca axe pe τ şi γ, obținându-se relația generală:

$$U_1 = \frac{1}{2} \cdot \left(\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}\right) \qquad 9.8\text{-}5$$

Energia specifică de deformație poate fi exprimată şi funcție numai de tensiuni. Pentru aceasta, se exprimă deformațiile ε şi γ prin expresiile date de relațiile 9.6-7 şi 9.6-8, obținându-se în final:

$$\begin{aligned} U_1 = {} & \frac{1}{2E} \cdot \left(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2\right) - \frac{\nu}{E} \cdot \left(\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x\right) + \\ & + \frac{1}{2G} \cdot \left(\tau_{xy}^2 + \tau_{zy}^2 + \tau_{zx}^2\right) \end{aligned} \qquad 9.8\text{-}6$$

Relația 9.8-6 permite calculul energiei specifice de deformație pentru cazurile particulare de solicitare.

❖ *Pentru starea plană de tensiune*, se obține:

$$U_1 = \frac{1}{2E} \cdot \left(\sigma_x^2 + \sigma_y^2\right) - \frac{\nu}{E} \cdot \sigma_x \sigma_y + \frac{1}{2G} \cdot \tau_{xy}^2 \qquad 9.8\text{-}7$$

❖ *Pentru starea de întindere simplă:*

$$U_1 = \frac{\sigma_x^2}{2E} \qquad 9.8\text{-}8$$

❖ *Pentru starea de forfecare pură:*

$$U_1 = \frac{\tau_{xy}^2}{2G} \qquad 9.8\text{-}9$$

Energia de deformație acumulată într-un corp, are în general două efecte: *variația volumului* şi *variația formei*. Dacă elementul este solicitat pe toate fețele de tensiuni egale, se obține numai o modificare de volum.

Dacă asupra tuturor fețelor acționează tensiunea medie *p*:

$$p = \frac{1}{3} \cdot \left(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3\right)$$

aceasta produce deformația volumică *e*, iar *energia de variație a volumului* este:

$$U_{1v} = \frac{p \cdot e}{2} = \frac{p}{2} \cdot 3 \cdot \frac{1-2\nu}{E} \cdot p = \frac{3 \cdot (1-2\nu)}{2E} \cdot p^2 = \\ = \frac{3 \cdot (1-2\nu)}{2E} \cdot \frac{\left(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3\right)^2}{9} \qquad 9.8\text{-}10$$

iar după simplificări:

$$U_{1v} = \frac{1-2\nu}{6E} \cdot \left(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3\right)^2 \qquad 9.8\text{-}11$$

Energia de modificare a formei se obține scăzând din energia totală, energia de modificare a volumului:

$$U_{1f} = U_1 - U_{1v} =$$

$$= \frac{1}{2E}\left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2\right) - \frac{\nu}{E}\left(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1\right) - \frac{1-2\nu}{6E}\left(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3\right)^2 \quad 9.8\text{-}12$$

După unele transformări, relația 9.8-12 poate fi scrisă şi sub forma:

$$U_{1f} = \frac{1+\nu}{6E}\left[\left(\sigma_1 - \sigma_2\right)^2 + \left(\sigma_2 - \sigma_3\right)^2 + \left(\sigma_3 - \sigma_1\right)^2\right] \quad 9.8\text{-}13$$

Împărțirea energiei de deformație în două componente derivă din împărțirea tensorului tensiunilor, într-un *tensor sferic* T_S de componente egale cu *p* care produce modificarea volumului şi un *tensor deviator* T_d, care produce modificarea formei:

$$T_\sigma = T_S + T_d$$

sau sub formă explicită:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \sigma_1 - p & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 - p & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 - p \end{Bmatrix} \quad 9.8\text{-}14$$

Suma tensorială (relația 9.8-14) este prezentată în Fig.9.8-2.

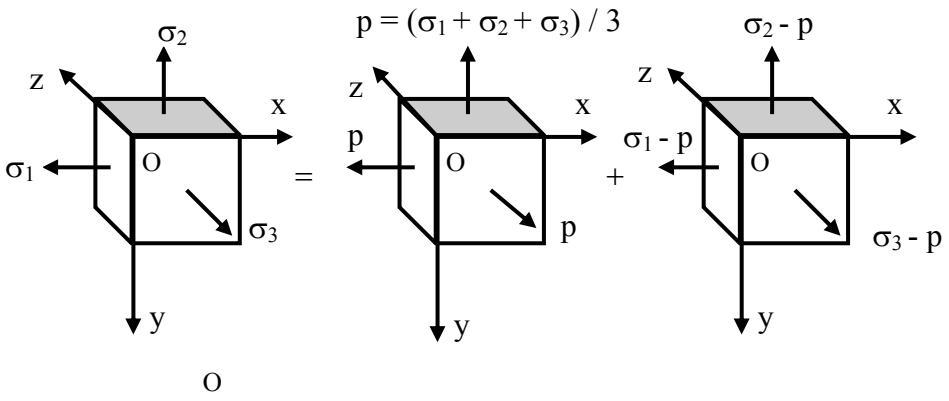


Fig.9.8-2

B I B L I O G R A F I E

1. BABEU T: Rezistența Materilelor, Lito. I.P. “T. V.” Timişoara, 1980
2. BELEAEV N. M: Rezistența Materialelor Vol. I-II, Ed. Tehnică, Bucureşti. 1956
3. BIA C, ILLE V, SOARE M,V: Rezistența Materialelor şi Teoria Elasticității, Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1983
4. BUZDUGAN G: Rezistența Materialelor, Ed. Academiei R.S.R., Bucureşti, 1986
5. DEUTSCH I: Rezistența Materialelor, Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1979
6. DEUTSCH I, GOIA I, CURTU I, NEAMȚU T, SPERCHEZ F: Probleme de Rezistența Materialelor, Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1983
7. DUMITRU I, NEGUȚ N: Curs de Rezistența Materialelor, Lito I.P. “T.V.” Timişoara, 1984
8. HAJDU I: Rezistența Materialelor, Lito I.P. “T.V.”, Timişoara, 1983
9. MOCANU D.R: Rezistența Materialelor, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1980
10. TRIPA P: Etape şi modele de rezolvare a problemelor de rezistența materialelor, Ed. MIRTON, Timişoara, 1999
11. VOINEA R, VOICULESCU D, SIMION F.P: Introducere în mecanica solidului cu aplicații în inginerie, Ed. Academiei R.S.R., Bucureşti, 1989